Exploration d'algèbres de Kac de dimension finie et treillis des facteurs intermédiaires d'une inclusion irréductible

Marie-Claude DAVID et Nicolas M. THIÉRY

Exposé à deux voix et un ordinateur

08 janvier 2009

Exemples d'algèbres de Kac

Algèbres de Kac et inclusion de facteurs

Coïdalgèbres

$KD(2m+1)$

$KD(2m)$

Algèbres de groupes et leurs duales

Algèbres de Kac

Definition

$(K, \Delta, S, \varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf de dimension finie

- K une C^*-algèbre de dimension finie $(m, *, 1)$:
  $K = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$
  avec la trace canonique normalisée :
  $tr(e_i) = 1/\dim K, \quad tr(e_{j,j}) = 2/\dim K, \quad tr(1) = 1$
- Δ un coproduit coassociatif sur K, homomorphisme de K dans $K \otimes K$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- ε la counité : $\varepsilon(x) = \dim K \; tr(e_1 x) \quad (x \in K)$
- S l'antipode, unique quand le reste est donné

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$$

Algèbres de Kac

Definition

$(K, \Delta, S, \varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf de dimension finie

- K une C^*-algèbre de dimension finie $(m, *, 1)$:
  $K = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$
  avec la trace canonique normalisée :
  $tr(e_i) = 1/\dim K, \quad tr(e_{j,j}) = 2/\dim K, \quad tr(1) = 1$
- Δ un coproduit coassociatif sur K, homomorphisme de K dans $K \otimes K$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- ε la counité : $\varepsilon(x) = \dim K \; tr(e_1 x) \quad (x \in K)$
- S l'antipode, unique quand le reste est donné

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$$

Algèbres de Kac

Definition

$(K, \Delta, S, \varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf de dimension finie

- K une C^*-algèbre de dimension finie $(m, *, 1)$:
  $K = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$
  avec la trace canonique normalisée :
  $tr(e_i) = 1/\dim K, \quad tr(e_{j,j}) = 2/\dim K, \quad tr(1) = 1$
- Δ un coproduit coassociatif sur K, homomorphisme de K dans $K \otimes K$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- ε la counité : $\varepsilon(x) = \dim K \; tr(e_1 x) \quad (x \in K)$
- S l'antipode, unique quand le reste est donné

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$$

Algèbres de Kac

Definition

$(K, \Delta, S, \varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf de dimension finie

- K une C^*-algèbre de dimension finie $(m, *, 1)$:
  $K = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$
  avec la trace canonique normalisée :
  $tr(e_i) = 1/\dim K, \quad tr(e_{j,j}) = 2/\dim K, \quad tr(1) = 1$
- Δ un coproduit coassociatif sur K, homomorphisme de K dans $K \otimes K$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- ε la counité : $\varepsilon(x) = \dim K \; tr(e_1 x) \quad (x \in K)$
- S l'antipode, unique quand le reste est donné

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$$

Algèbres de Kac

Definition

$(K, \Delta, S, \varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf de dimension finie

- K une C^*-algèbre de dimension finie $(m, *, 1)$:
  $K = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4 \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$
  avec la trace canonique normalisée :
  $tr(e_i) = 1/\dim K, \quad tr(e_{j,j}) = 2/\dim K, \quad tr(1) = 1$
- Δ un coproduit coassociatif sur K, homomorphisme de K dans $K \otimes K$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- ε la counité : $\varepsilon(x) = \dim K \; tr(e_1 x) \quad (x \in K)$
- S l'antipode, unique quand le reste est donné

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$$

Exemples non triviaux d'algèbres de Kac

Exemple (Kac, Paljutkin 1966)

KP de dim 8

Description par déformation d'algèbre de groupe (Enock, Vainerman 1996)

Exemples (Vainerman, Nikshych 1998)

$KD(n)$ *et* $KQ(n)$ *de dim* $4n$

Exemples non triviaux d'algèbres de Kac

Exemple (Kac, Paljutkin 1966)

KP *de dim* 8

Description par déformation d'algèbre de groupe (Enock, Vainerman 1996)

Exemples (Vainerman, Nikshych 1998)

$KD(n)$ *et* $KQ(n)$ *de dim* $4n$

Exemples non triviaux d'algèbres de Kac

Exemple (Kac, Paljutkin 1966)

KP *de dim* 8

Description par déformation d'algèbre de groupe (Enock, Vainerman 1996)

Exemples (Vainerman, Nikshych 1998)

$KD(n)$ *et* $KQ(n)$ *de dim* $4n$

Automorphismes, isomorphismes

Théorème

$KD(2m)$ est isomorphe à $KQ(2m)$:

$$\phi : \begin{cases} a & \mapsto \quad \frac{1}{4}(a-a^{-1})(a^m-a^{-m})(a^m-b)+a \\ b & \mapsto \quad \frac{1}{2}(a^m+a^{-m})(b+\mathrm{i})-\mathrm{i}a^m \end{cases}$$

Théorème

Groupe d'automorphisme de $KD(n)$ et $KQ(n)$: $\mathbb{Z}_{2n}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$a \mapsto a^r, \qquad b \mapsto b, \qquad \textit{pour } r \wedge 2n = 1$$

$$a \mapsto a - \frac{1}{2}(a-a^{-1})(1+a^n), \qquad b \mapsto a^n b$$

Théorème

$KD(2m+1)$ et $KQ(2m+1)$ sont autoduales :

$$a \mapsto \widehat{e_{2,2}^{n-2}} + \frac{1}{2}(\widehat{e_{1,1}^{1}} - \widehat{e_{2,2}^{1}} - \widehat{e_{1,2}^{n-2}} - \widehat{e_{2,1}^{n-2}}), \qquad b \mapsto \widehat{e_4}$$

Automorphismes, isomorphismes

Théorème

$KD(2m)$ est isomorphe à $KQ(2m)$:

$$\phi : \begin{cases} a & \mapsto \frac{1}{4}(a - a^{-1})(a^m - a^{-m})(a^m - b) + a \\ b & \mapsto \frac{1}{2}(a^m + a^{-m})(b + \mathrm{i}) - \mathrm{i}a^m \end{cases}$$

Théorème

Groupe d'automorphisme de $KD(n)$ et $KQ(n)$: $\mathbb{Z}_{2n}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$a \mapsto a^r, \qquad b \mapsto b, \qquad \textit{pour } r \wedge 2n = 1$$

$$a \mapsto a - \frac{1}{2}(a - a^{-1})(1 + a^n), \qquad b \mapsto a^n b$$

Théorème

$KD(2m+1)$ et $KQ(2m+1)$ sont autoduales :

$$a \mapsto \widehat{e^{n-2}_{2,2}} + \frac{1}{2}(\widehat{e^1_{1,1}} - \widehat{e^1_{2,2}} - \widehat{e^{n-2}_{1,2}} - \widehat{e^{n-2}_{2,1}}), \qquad b \mapsto \widehat{e_4}$$

Automorphismes, isomorphismes

Théorème

$KD(2m)$ est isomorphe à $KQ(2m)$:

$$\phi : \begin{cases} a & \mapsto & \frac{1}{4}(a - a^{-1})(a^m - a^{-m})(a^m - b) + a \\ b & \mapsto & \frac{1}{2}(a^m + a^{-m})(b + \mathrm{i}) - \mathrm{i}a^m \end{cases}$$

Théorème

Groupe d'automorphisme de $KD(n)$ et $KQ(n)$: $\mathbb{Z}_{2n}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$a \mapsto a^r, \qquad b \mapsto b, \qquad \text{pour } r \wedge 2n = 1$$

$$a \mapsto a - \frac{1}{2}(a - a^{-1})(1 + a^n), \qquad b \mapsto a^n b$$

Théorème

$KD(2m+1)$ et $KQ(2m+1)$ sont autoduales :

$$a \mapsto \widehat{e_{2,2}^{n-2}} + \frac{1}{2}(\widehat{e_{1,1}^{1}} - \widehat{e_{2,2}^{1}} - \widehat{e_{1,2}^{n-2}} - \widehat{e_{2,1}^{n-2}}), \qquad b \mapsto \widehat{e_4}$$

Automorphismes, isomorphismes

Théorème

$KD(2m)$ est isomorphe à $KQ(2m)$:

$$\phi : \begin{cases} a & \mapsto \frac{1}{4}(a - a^{-1})(a^m - a^{-m})(a^m - b) + a \\ b & \mapsto \frac{1}{2}(a^m + a^{-m})(b + \mathrm{i}) - \mathrm{i}a^m \end{cases}$$

Théorème

Groupe d'automorphisme de $KD(n)$ et $KQ(n)$: $\mathbb{Z}_{2n}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$a \mapsto a^r, \qquad b \mapsto b, \qquad \text{pour } r \wedge 2n = 1$$

$$a \mapsto a - \frac{1}{2}(a - a^{-1})(1 + a^n), \qquad b \mapsto a^n b$$

Théorème

$KD(2m+1)$ et $KQ(2m+1)$ sont autoduales :

$$a \mapsto \widehat{e_{2,2}^{n-2}} + \frac{1}{2}(\widehat{e_{1,1}^{1}} - \widehat{e_{2,2}^{1}} - \widehat{e_{1,2}^{n-2}} - \widehat{e_{2,1}^{n-2}}), \qquad b \mapsto \widehat{e_4}$$

Automorphismes, isomorphismes, autodualité

Théorème

$KD(2m)$ est isomorphe à $KQ(2m)$:

$$\phi : \begin{cases} a & \mapsto & \frac{1}{4}(a - a^{-1})(a^m - a^{-m})(a^m - b) + a \\ b & \mapsto & \frac{1}{2}(a^m + a^{-m})(b + \mathrm{i}) - \mathrm{i}a^m \end{cases}$$

Théorème

Groupe d'automorphisme de $KD(n)$ et $KQ(n)$: $\mathbb{Z}_{2n}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$a \mapsto a^r, \qquad b \mapsto b, \qquad \text{pour } r \wedge 2n = 1$$

$$a \mapsto a - \frac{1}{2}(a - a^{-1})(1 + a^n), \qquad b \mapsto a^n b$$

Théorème

$KD(2m+1)$ et $KQ(2m+1)$ sont autoduales :

$$a \mapsto \widehat{e_{2,2}^{n-2}} + \frac{1}{2}(\widehat{e_{1,1}^{1}} - \widehat{e_{2,2}^{1}} - \widehat{e_{1,2}^{n-2}} - \widehat{e_{2,1}^{n-2}}), \qquad b \mapsto \widehat{e_4}$$

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Algorithme de calcul d'isomorphisme de Kac par détorsion

- $K := K(\mathbb{C}[G], H, \Omega)$: algèbre de Kac
  tordue d'un $\mathbb{C}[G]$ par un 2-pseudo cocycle Ω de $H < G$
- K' : une algèbre de Kac
- Problème : $K \approx K'$? Isomorphisme explicite ϕ ?
- Si oui : $K'' := K(K', \phi(H), \Omega^{-1}) \approx \mathbb{C}[G]$
- Algorithme :
  - Calcul du groupe intrinsèque H' de K'
  - Calcul des plongements ρ de H dans H'
  - Construction de $K'' := K(K', \rho(H), \Omega^{-1})$
  - Coproduit symétrique ?
  - Calcul du groupe intrinsèque G'' of K''
  - Calcul des isomorphismes de G dans G'' compatibles avec ρ

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$
  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x,y\rangle = tr(y^*x) \quad (x,y \in R)$
- $L^2(R,tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R,\langle .,.\rangle)$:

$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R,tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R,tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$
  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x,y\rangle = tr(y^*x) \quad (x,y \in R)$
- $L^2(R,tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R,\langle .,.\rangle)$:

$$R \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} L^2(R,tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R,tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$
  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x,y\rangle = tr(y^*x) \quad (x,y \in R)$
- $L^2(R,tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R,\langle .,.\rangle)$:

$$R \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} L^2(R,tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R,tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$ $\begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}$
  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle .,.\rangle)$:

$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

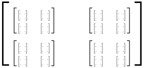
$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

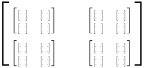
$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^* x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

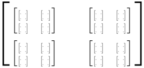
$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle .,.\rangle)$:

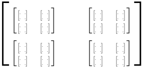
$$R \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

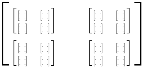
$$R \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^* x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

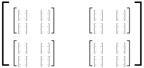
$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Facteur hyperfini de type II_1 (Murray-von Neumann 1937)

- Le facteur hyperfini de type II_1 R est une algèbre de dimension infinie qui tient de $L^\infty(X,\mu)$ et de $M_n(\mathbb{C})$
- **Propriétés du facteur R :**
  - hyperfini : $R = \overline{\cup_{n>1} M_{2^n}(\mathbb{C})}$



  - facteur : $Z(R) = \mathbb{C}$
  - type II_1 : unique trace normale, finie, fidèle normalisée telle que $tr(\mathcal{P}) = [0;1]$
- Produit scalaire : $\langle x, y\rangle = tr(y^*x) \quad (x, y \in R)$
- $L^2(R, tr)$ est l'**espace de Hilbert complété** de $(R, \langle ., .\rangle)$:

$$R \quad \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} \quad L^2(R, tr)$$

- R agit par multiplication à gauche sur $L^2(R, tr)$:

$$y\Lambda(x) = \Lambda(yx) \quad (x \in R, y \in R)$$

Inclusions de facteurs de type II_1 (Jones 83)

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini $[N_1 : N_0]$ de facteurs de type II_1 et tr la trace normale finie fidèle normalisée de N_1

- Exemples : $R^G \subset R$ ou plus généralement $R^K \subset R$
- Le **projecteur orthogonal** f_1 ($f_1 = f_1^2 = f_1^*$) sur $\Lambda(N_0)$ est appelé projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_1$

$$N_0 = \{f_1\}' \cap N_1$$

- On obtient un nouveau facteur $N_2 = \langle N_1, f_1 \rangle$. En répétant la construction de base on obtient la **tour de Jones** :

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \subset \cdots$$

Inclusions de facteurs de type II_1 (Jones 83)

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini $[N_1 : N_0]$ de facteurs de type II_1 et tr la trace normale finie fidèle normalisée de N_1

- Exemples : $R^G \subset R$ ou plus généralement $R^K \subset R$
- Le **projecteur orthogonal** f_1 ($f_1 = f_1^2 = f_1^*$) sur $\Lambda(N_0)$ est appelé projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_1$

$$N_0 = \{f_1\}' \cap N_1$$

- On obtient un nouveau facteur $N_2 = \langle N_1, f_1 \rangle$. En répétant la construction de base on obtient la **tour de Jones** :

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \subset \cdots$$

Inclusions de facteurs de type II_1 (Jones 83)

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini $[N_1 : N_0]$ de facteurs de type II_1 et tr la trace normale finie fidèle normalisée de N_1

- Exemples : $R^G \subset R$ ou plus généralement $R^K \subset R$
- Le **projecteur orthogonal** f_1 ($f_1 = f_1^2 = f_1^*$) sur $\Lambda(N_0)$ est appelé projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_1$

$$N_0 = \{f_1\}' \cap N_1$$

- On obtient un nouveau facteur $N_2 = \langle N_1, f_1 \rangle$. En répétant la construction de base on obtient la **tour de Jones** :

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \subset \cdots$$

Inclusions de facteurs de type II_1 (Jones 83)

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini $[N_1 : N_0]$ de facteurs de type II_1 et tr la trace normale finie fidèle normalisée de N_1

- Exemples : $R^G \subset R$ ou plus généralement $R^K \subset R$
- Le **projecteur orthogonal** f_1 ($f_1 = f_1^2 = f_1^*$) sur $\Lambda(N_0)$ est appelé projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_1$

$$N_0 = \{f_1\}' \cap N_1$$

- On obtient un nouveau facteur $N_2 = \langle N_1, f_1 \rangle$. En répétant la construction de base on obtient la **tour de Jones** :

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \subset \cdots$$

Inclusions irréductibles de profondeur 2

¡¡¡¡¡¡¡ .mine

$$N_0' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_0' \cap N_2 \overset{f_2}{\subset} N_0' \cap N_3$$

Cas d'une action de groupe : $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$

$$N_0' \cap N_2 = \mathbb{C}[G] \quad \text{et} \quad N_1' \cap N_3 = L^\infty(G)$$

Cas général :

- $A := N_0' \cap N_2$ et $B := N_1' \cap N_3$ sont des C^*-algèbres de dimension finie
- les structures de C^*-algèbres de Hopf sont obtenues par dualité :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(a f_2 f_1 b)$$

- A agit sur N_1 :
  - $N_0 = N_1^A$, algèbre des points fixes de N_1 sous l'action de A
  - $N_2 = N_1 \rtimes A$

Inclusions irréductibles de profondeur 2

¡¡¡¡¡¡¡ .mine

$$N_0' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_0' \cap N_2 \overset{f_2}{\subset} N_0' \cap N_3$$

Cas d'une action de groupe : $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$

$$N_0' \cap N_2 = \mathbb{C}[G] \quad \text{et} \quad N_1' \cap N_3 = L^\infty(G)$$

Cas général :

- $A := N_0' \cap N_2$ et $B := N_1' \cap N_3$ sont des C^*-algèbres de dimension finie
- les structures de C^*-algèbres de Hopf sont obtenues par dualité :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(af_2f_1b)$$

- A agit sur N_1 :
  - $N_0 = N_1^A$, algèbre des points fixes de N_1 sous l'action de A
  - $N_2 = N_1 \rtimes A$

Inclusions irréductibles de profondeur 2

¡¡¡¡¡¡¡ .mine

$$N_0' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_0' \cap N_2 \overset{f_2}{\subset} N_0' \cap N_3$$

Cas d'une action de groupe : $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$

$$N_0' \cap N_2 = \mathbb{C}[G] \quad \text{et} \quad N_1' \cap N_3 = L^\infty(G)$$

Cas général :

- $A := N_0' \cap N_2$ et $B := N_1' \cap N_3$ sont des C^*-algèbres de dimension finie
- les structures de C^*-algèbres de Hopf sont obtenues par dualité :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(a f_2 f_1 b)$$

- A agit sur N_1 :
  - $N_0 = N_1^A$, algèbre des points fixes de N_1 sous l'action de A
  - $N_2 = N_1 \rtimes A$

Inclusions irréductibles de profondeur 2

¡¡¡¡¡¡¡ .mine

$$N_0' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_0' \cap N_2 \overset{f_2}{\subset} N_0' \cap N_3$$

Cas d'une action de groupe : $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$

$$N_0' \cap N_2 = \mathbb{C}[G] \quad \text{et} \quad N_1' \cap N_3 = L^\infty(G)$$

Cas général :

- $A := N_0' \cap N_2$ et $B := N_1' \cap N_3$ sont des C^*-algèbres de dimension finie
- les structures de C^*-algèbres de Hopf sont obtenues par dualité :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(af_2 f_1 b)$$

- A agit sur N_1 :
  - $N_0 = N_1^A$, algèbre des points fixes de N_1 sous l'action de A
  - $N_2 = N_1 \rtimes A$

Inclusions irréductibles de profondeur 2

¡¡¡¡¡¡¡ .mine

$$N_0' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_0' \cap N_2 \overset{f_2}{\subset} N_0' \cap N_3$$

Cas d'une action de groupe : $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$

$$N_0' \cap N_2 = \mathbb{C}[G] \quad \text{et} \quad N_1' \cap N_3 = L^\infty(G)$$

Cas général :

- $A := N_0' \cap N_2$ et $B := N_1' \cap N_3$ sont des C^*-algèbres de dimension finie
- les structures de C^*-algèbres de Hopf sont obtenues par dualité :
$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(af_2f_1b)$$
- A agit sur N_1 :
  - $N_0 = N_1^A$, algèbre des points fixes de N_1 sous l'action de A
  - $N_2 = N_1 \rtimes A$

Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$

Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

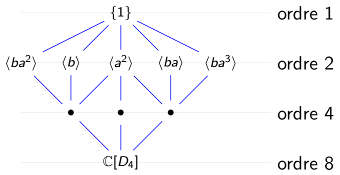
Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$



Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

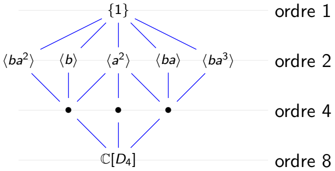
Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$



Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

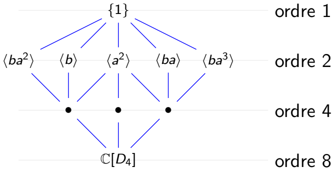
Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$



Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

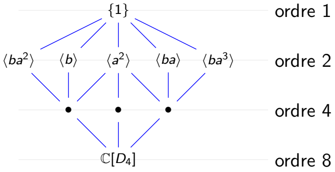
Cas d'une action de groupe ($N_0 = R^G \subset N_1 = R$) :

$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$



Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

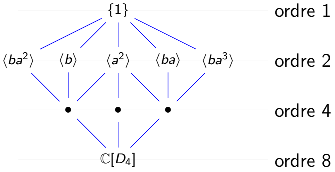
Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

$$R^G \subset M \subset R \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p \rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$



Correspondance facteurs intermédiaires $\longleftrightarrow$ coïdalgèbres

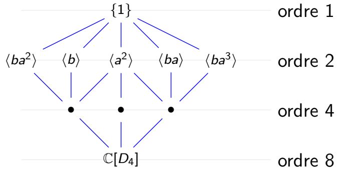
Cas d'une action de groupe $(N_0 = R^G \subset N_1 = R)$:

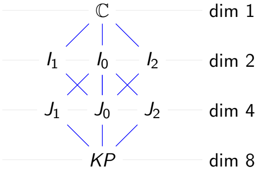
$$R^G \subset M \subset R \quad \Longleftrightarrow \quad M = R^H \quad \text{avec} \quad H < G$$

Cas général (Vainerman, Nikshych 2002) :

$$N_1 \subset M_1 \subset N_2 \overset{p}{\subset} M_3 = \langle N_2, p\rangle \subset N_3 = N_2 \rtimes K$$

- Caractérisation des projecteurs de Jones de facteurs intermédiaires (D. Bisch)
- Coïdalgèbre : $I(p) = N_1' \cap M_3 \subset K = N_1' \cap N_3$
- $\dim I = [M_3 : N_2]$





Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I *de* K *:*
sous-C^**-algèbre de* K *avec unité telle que* $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de* ε *à* I *est une forme linéaire positive sur* I
- *Il existe un unique projecteur* p_I *du centre de* I *tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad I p_I = \mathbb{C} p_I$$

On appelle p_I *le projecteur de Jones de* I

- *Les jambes droites de* $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ *engendrent* I *comme SEV. On note* $I = I(p_I)$

Exemple (Cas des groupes)

Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I *de* K *:*
sous-C^**-algèbre de* K *avec unité telle que* $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de* ε *à* I *est une forme linéaire positive sur* I
- *Il existe un unique projecteur* p_I *du centre de* I *tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad Ip_I = \mathbb{C}p_I$$

On appelle p_I *le projecteur de Jones de* I

- *Les jambes droites de* $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ *engendrent* I *comme SEV. On note* $I = I(p_I)$

Exemple (Cas des groupes)

Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I *de* K *:*
sous-C^**-algèbre de* K *avec unité telle que* $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de* ε *à* I *est une forme linéaire positive sur* I
- *Il existe un unique projecteur* p_I *du centre de* I *tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad Ip_I = \mathbb{C}p_I$$

  On appelle p_I *le projecteur de Jones de* I
- *Les jambes droites de* $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ *engendrent* I *comme SEV. On note* $I = I(p_I)$

Exemple (Cas des groupes)

Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I *de* K *:*
sous-C^**-algèbre de* K *avec unité telle que* $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de* ε *à* I *est une forme linéaire positive sur* I
- *Il existe un unique projecteur* p_I *du centre de* I *tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad I p_I = \mathbb{C} p_I$$

On appelle p_I *le projecteur de Jones de* I

- *Les jambes droites de* $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ *engendrent* I *comme SEV. On note* $I = I(p_I)$

Exemple (Cas des groupes)

Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I de K :
sous-C^*-algèbre de K avec unité telle que $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de ε à I est une forme linéaire positive sur I*
- *Il existe un unique projecteur p_I du centre de I tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad I p_I = \mathbb{C} p_I$$

  On appelle p_I le projecteur de Jones de I
- *Les jambes droites de $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ engendrent I comme SEV. On note $I = I(p_I)$*

Exemple (Cas des groupes)

Sous-algèbres involutives co-idéales à gauche (coïdalgèbres)

Définition (coïdalgèbre)

Sous-algèbre involutive co-idéale à gauche I *de* K *:*
sous-C^**-algèbre de* K *avec unité telle que* $\Delta(I) \subset K \otimes I$

Propositions (Vainerman, Nikshych 2002)

- *La restriction de* ε *à* I *est une forme linéaire positive sur* I
- *Il existe un unique projecteur* p_I *du centre de* I *tel que :*

$$\forall x \in I \quad \varepsilon(x) = \dim I \; tr(p_I x) \quad et \quad I p_I = \mathbb{C} p_I$$

  On appelle p_I *le projecteur de Jones de* I

- *Les jambes droites de* $\Delta(p_I) = \sum_k S(x_k^*) \otimes x_k$ *engendrent* I *comme SEV. On note* $I = I(p_I)$

Exemple (Cas des groupes)

Le treillis des coïdalgèbres $I(K)$

- Isomorphisme
  treillis facteurs intermédiaires de $N_2 \subset N_2 \rtimes K$ / treillis $I(K)$
- $I \subset J \Longleftrightarrow p_J < p_I$
- **Antiisomorphisme de treillis** δ de $I(K)$ sur $I(\widehat{K})$:

$$\delta(I) = S(I)' \cap \hat{K} \text{ dans } \widehat{K} \rtimes K$$

$$\dim I \times \dim \delta(I) = \dim K$$

Le treillis des coïdalgèbres $I(K)$

- Isomorphisme
  treillis facteurs intermédiaires de $N_2 \subset N_2 \rtimes K$ / treillis $I(K)$
- $I \subset J \Longleftrightarrow p_J < p_I$
- **Antiisomorphisme de treillis** δ de $I(K)$ sur $I(\widehat{K})$:

$$\delta(I) = S(I)' \cap \hat{K} \text{ dans } \widehat{K} \rtimes K$$

$$\dim I \times \dim \delta(I) = \dim K$$

Le treillis des coïdalgèbres $I(K)$

- Isomorphisme
  treillis facteurs intermédiaires de $N_2 \subset N_2 \rtimes K$ / treillis $I(K)$
- $I \subset J \Longleftrightarrow p_J < p_I$
- **Antiisomorphisme de treillis** δ de $I(K)$ sur $I(\widehat{K})$:

$$\delta(I) = S(I)' \cap \hat{K} \text{ dans } \widehat{K} \rtimes K$$

$$\dim I \times \dim \delta(I) = \dim K$$

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 ($pe_1 = e_1 p = e_1$), support de la counité de K
- $1/tr(p)$ ($= [M_3 : N_2]$) divise $\dim K$ ($= [N_3 : N_2]$)
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ ($i = 2, 3, 4$) dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 $(pe_1 = e_1 p = e_1)$, support de la counité de K
- $1/tr(p)$ $(= [M_3 : N_2])$ divise $\dim K$ $(= [N_3 : N_2])$
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ $(i = 2, 3, 4)$ dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 $(pe_1 = e_1 p = e_1)$, support de la counité de K
- $1/tr(p)$ $(= [M_3 : N_2])$ divise $\dim K$ $(= [N_3 : N_2])$
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ $(i = 2, 3, 4)$ dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 ($pe_1 = e_1 p = e_1$), support de la counité de K
- $1/tr(p)$ ($= [M_3 : N_2]$) divise $\dim K$ ($= [N_3 : N_2]$)
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ ($i = 2, 3, 4$) dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 $(pe_1 = e_1 p = e_1)$, support de la counité de K
- $1/tr(p)$ $(= [M_3 : N_2])$ divise $\dim K$ $(= [N_3 : N_2])$
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ $(i = 2, 3, 4)$ dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 $(pe_1 = e_1 p = e_1)$, support de la counité de K
- $1/tr(p)$ $(= [M_3 : N_2])$ divise $\dim K$ $(= [N_3 : N_2])$
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ $(i = 2, 3, 4)$ dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 ($pe_1 = e_1 p = e_1$), support de la counité de K
- $1/tr(p)$ ($= [M_3 : N_2]$) divise $\dim K$ ($= [N_3 : N_2]$)
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ ($i = 2, 3, 4$) dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Comment rechercher les coïdalgèbres ?

On cherche les projecteurs orthogonaux p dans K tels que :

- p domine e_1 ($pe_1 = e_1 p = e_1$), support de la counité de K
- $1/tr(p)$ $(= [M_3 : N_2])$ divise $\dim K$ $(= [N_3 : N_2])$
- Les *jambes droites* de $\Delta(p)$ engendrent une coïdalgèbre de dimension $1/tr(p)$

Exemple (Coïdalgèbres de $\dim = 2n$ dans $KD(n)$ et $KQ(n)$)

Seuls $e_1 + e_i$ ($i = 2, 3, 4$) dominent e_1 avec trace $= \frac{1}{2n}$

- *Dans $KD(n)$: ce sont tous des projecteurs de Jones*
- *Dans $KQ(n)$: seul $e_1 + e_2$ l'est*
- *Notation : $K_i = I(e_1 + e_i)$*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim 2n :* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim 2n :* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim $2n$:* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim* $2n$: K_2, K_3, K_4
- *Dim* n : $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim $2n$:* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim 2n :* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim* $2n$: K_2, K_3, K_4
- *Dim* n : $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout* n*)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant* n *contenues dans* K_2
- *Dim* n : n *coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 :* n *coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim* $2n$: K_2, K_3, K_4
- *Dim* n : $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

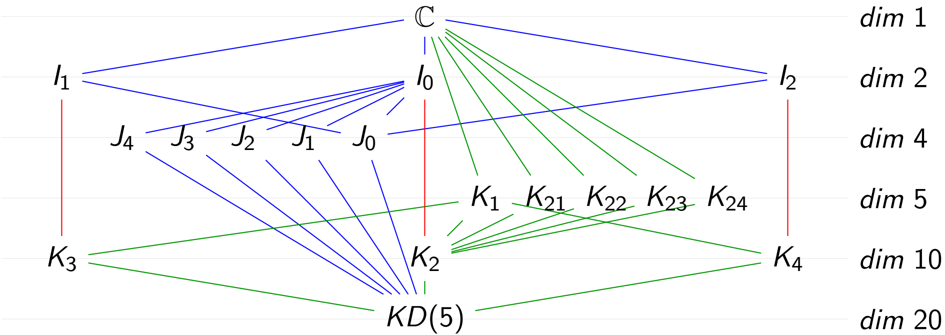
Propositions

- $\mathbb{C}[H]$
- *Dim 2 : algèbres des trois sous-groupes d'ordre 2 de H*
- *Dim 2n :* K_2, K_3, K_4
- *Dim n :* $K_1 = K_2 \cap K_3 \cap K_4$
- $K_2 = L^\infty(D_n)$ *(pour tout n)*
- K_3 *et* K_4 *isomorphes mais pas sous-algèbres de Kac*
  $\Delta(e_1 + e_4) \implies$ *unités matricielles de* K_4
- *Coïdalgèbres de dimension divisant n contenues dans* K_2
- *Dim n : n coïdalgèbres*
  (fonctions constantes modulo les sous-groupes d'ordre 2)
- *Dim 4 : n coïdalgèbres*

Le treillis de $KD(n)$ pour n premier

Théorème

Pour n premier, le treillis est similaire à celui de $KD(5)$:



Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Restent les coïdalgèbres $I_2 \subset I \subset K_4$ de dim $2k|2n$

Conjecture

Pour n impair, le treillis est similaire à celui de $KD(15)$ *:*

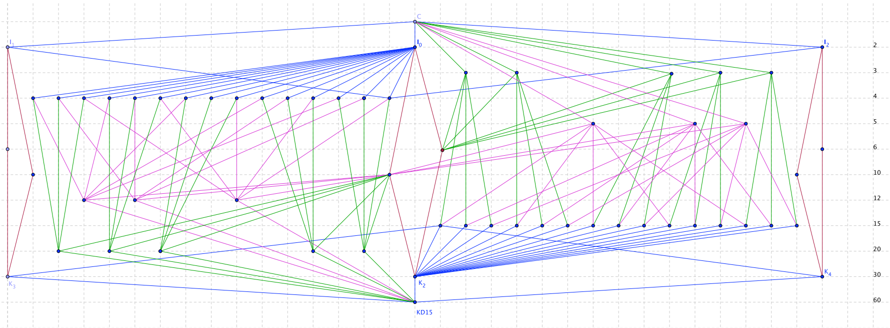
(vérifié pour $n \leq 51$*)*

Le treillis de $KD(n)$ pour n impair

Restent les coïdalgèbres $I_2 \subset I \subset K_4$ de dim $2k|2n$

Conjecture

Pour n impair, le treillis est similaire à celui de $KD(15)$:



(vérifié pour $n \leq 51$)

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre* K_0 *engendrée par* a^m *et* b*, est isomorphe à* $KD(2)$*,*
- K_4*, engendrée par* a^2 *et* b*, est isomorphe à* $KD(m)$
- *Quand* m *est impair,* K_3 *est isomorphe à* $KQ(m)$
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant* $2n$ *contenues dans* K_2*,* K_3*,* K_4

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre K_0 engendrée par a^m et b, est isomorphe à $KD(2)$,*
- *K_4, engendrée par a^2 et b, est isomorphe à $KD(m)$*
- *Quand m est impair, K_3 est isomorphe à $KQ(m)$*
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant $2n$ contenues dans K_2, K_3, K_4*

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre K_0 engendrée par a^m et b, est isomorphe à $KD(2)$,*
- *K_4, engendrée par a^2 et b, est isomorphe à $KD(m)$*
- *Quand m est impair, K_3 est isomorphe à $KQ(m)$*
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant $2n$ contenues dans K_2, K_3, K_4*

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre K_0 engendrée par a^m et b, est isomorphe à $KD(2)$,*
- *K_4, engendrée par a^2 et b, est isomorphe à $KD(m)$*
- *Quand m est impair, K_3 est isomorphe à $KQ(m)$*
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant $2n$ contenues dans K_2, K_3, K_4*

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

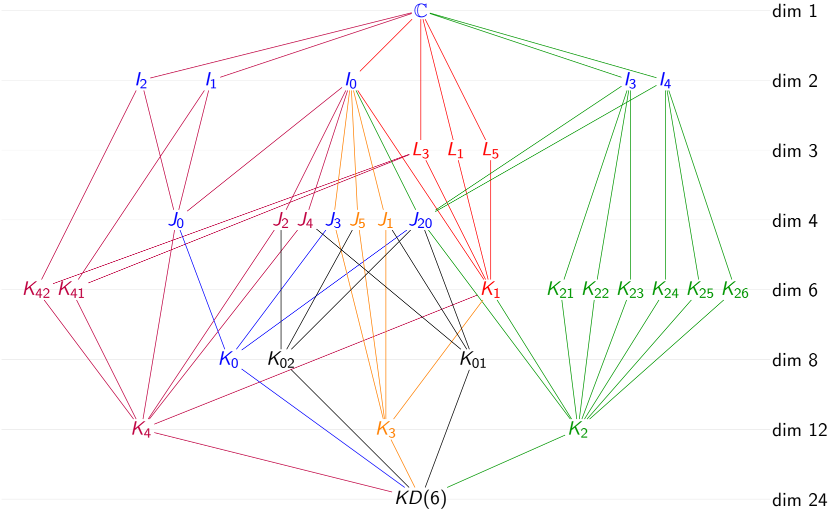
- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre K_0 engendrée par a^m et b, est isomorphe à $KD(2)$,*
- *K_4, engendrée par a^2 et b, est isomorphe à $KD(m)$*
- *Quand m est impair, K_3 est isomorphe à $KQ(m)$*
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant $2n$ contenues dans K_2, K_3, K_4*

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(2m)$

Propositions

- $K_2 = L^\infty(D_n)$
- *L'algèbre* K_0 *engendrée par* a^m *et* b, *est isomorphe à* $KD(2)$,
- K_4, *engendrée par* a^2 *et* b, *est isomorphe à* $KD(m)$
- *Quand* m *est impair,* K_3 *est isomorphe à* $KQ(m)$
  Sinon ce n'est même pas l'algèbre twistée d'un groupe !
- *Coïdalgèbres de dim divisant* $2n$ *contenues dans* K_2, K_3, K_4

Le treillis des coïdalgèbres de $KD(6)$



Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

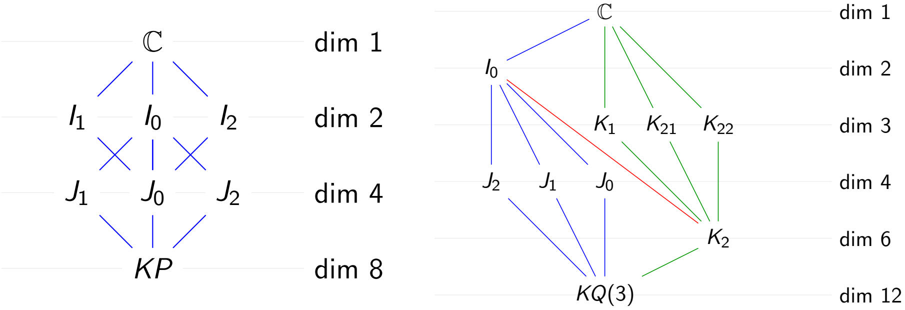
Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

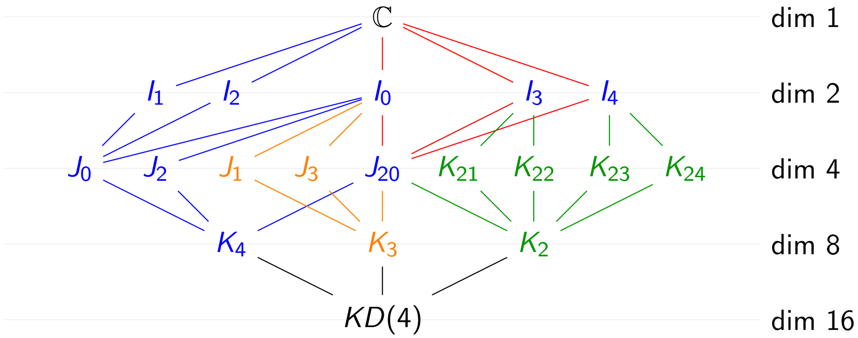
Conclusion

- Exemples et familles infinies d'exemples de treillis
- Outils pour ce type d'étude
- $KQ(n)$ pour n impair ?
- $KD(n)$ pour n pair ?
- K_3 dans $KD(2m)$?
- Algorithme systématique ?
- Groupoïdes quantiques ?

Les treillis de KP et $KQ(3)$



Le treillis des coïdalgèbres de $KD(4)$



Le treillis des coïdalgèbres de $KD(9)$