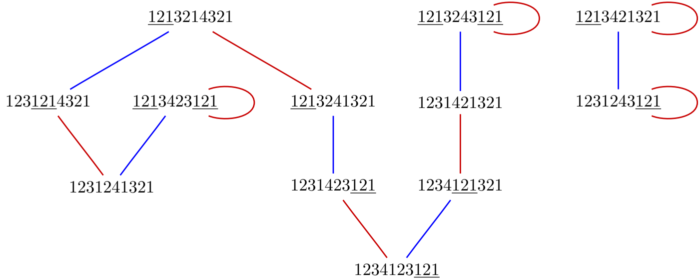
Nombre moyen de tresses dans les mots réduits et tableaux justifiés à droite

Nicolas M. Thiéry, Université Paris Sud

avec Anne Schilling, Graham White, Nathan Williams

arXiv :1507.00656 [math.CO]

Séminaire de combinatoire Philippe Flajolet, Jeudi 2 juin 2016



Dynamical algebraic combinatorics

March 23 to March 27, 2015

at the

American Institute of Mathematics, Palo Alto, California

organized by

James Propp, Tom Roby, Jessica Striker, and Nathan Williams

Original Announcement

This workshop will focus on dynamical systems arising from algebraic combinatorics. Some well-known examples of actions on combinatorial objects are:

- promotion and evacuation for Young tableaux;
- the action of a Coxeter element on a parabolic quotient of a Coxeter group; and
- crystal operators on highest-weight representations.

Of particular relevance to this workshop are the actions and dynamical systems arising from:

- promotion and rowmotion for order ideals and antichains in posets; and
- their piecewise-linear and birational liftings.

A unifying theme is the central role played by involutions, such as the Bender-Knuth involutions whose composition gives promotion of Young tableaux and the toggle operations whose composition gives rowmotion of order ideals. Typical questions we ask in various contexts are: Why does this product of involutions --- a permutation on a large set --- have such small order? (Or, if it has large order, why does the action nevertheless resonate with a small integer p as a pseudo-period, in the sense that most orbit-sizes are multiples of p?) Why do certain combinatorially significant numerical functions (statistics) on the set have the property that the average value of the function on each orbit is the same for all orbits (the homomesy phenomenon)?

Some of the properties of these cyclic actions can be explained by the importation of combinatorial or algebraic models that explain why the action exists. When the cyclic action has predictable orbit structure, this program has been very successful (as seen in the recent flurry of work on the cyclic sieving phenomenon). The encoding of alternating sign matrices under gyration by fully packed loops and their associated link-patterns shows that such models can exist even when the orbits of the cyclic action display resonance and some are quite large. We hope to study further actions of this last sort, such as rowmotion on plane partitions of height greater than two.

Some examples of problems we are interested in are:

- To use data provided by cyclic actions, invariants, and homomesies to produce new bijections between combinatorial objects.
- To coordinate work on homomesy and generalized toggle group actions.
- To suggest directions for future research.

Material from the workshop

A list of participants.

The workshop schedule.

A report on the workshop activities.

A list of workshop notes and open problems, by Sam Hopkins.

ath.org/images/workshop/dynalgcomb.jpg

Mots réduits **w** pour w_0 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Tri par bulle de *dcba*

Mots réduits **w** pour w_0 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Tri par bulle de *dcba*

Définition

$\mathrm{Red}(w_0)$: ensemble des mots réduits w pour w_0 dans $\mathfrak{S}_n$

Mots réduits **w** pour w_0 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Tri par bulle de *dcba*

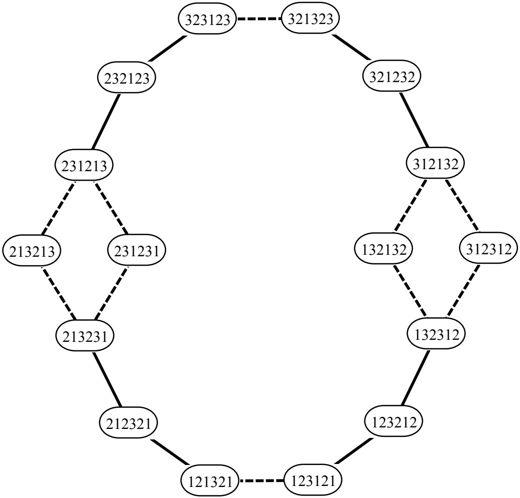
Définition

$\mathrm{Red}(w_0)$: ensemble des mots réduits w pour w_0 dans $\mathfrak{S}_n$

Exemple

Pour $\mathfrak{S}_3$, $\mathrm{Red}(w_0) = \{121, 212\}$

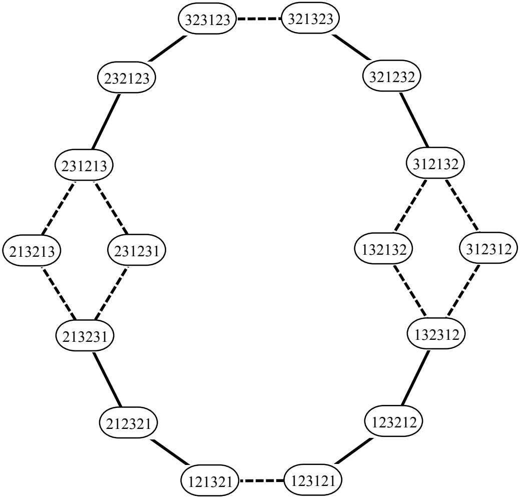
Exemple : Red(w_0) for $\mathfrak{S}_4$



— : *relation de tresse* $iji = jij \quad |i-j| = 1$

– – – : *relation de commutation* $ij = ji \quad |i-j| > 1$

Nombres de tresses dans les mots réduits ?



Tresse dans $\mathbf{w}$: occurrence de iji dans $\mathbf{w}$, avec $|i-j|=1$

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

Démonstration.

1. Correspondance d'Edelman Green
2. Énoncé sur les tableaux de Young standards escaliers
3. Opérateurs de promotion
4. Chirurgie et formule des équerres $\square$

Théorème (Vic Reiner '05)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Red}(w_0)$ *a une tresse*

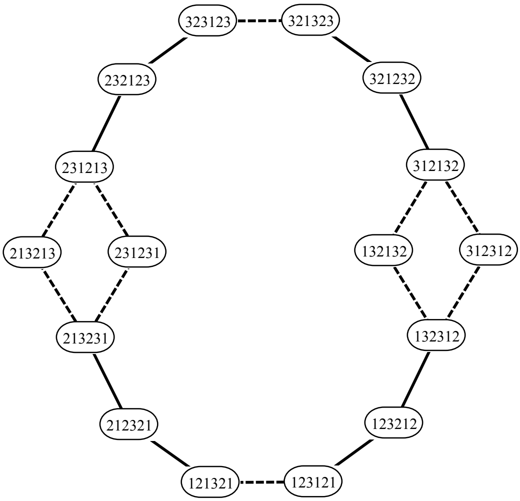
Démonstration.

1. Correspondance d'Edelman Green
2. Énoncé sur les tableaux de Young standards escaliers
3. Opérateurs de promotion
4. Chirurgie et formule des équerres $\square$

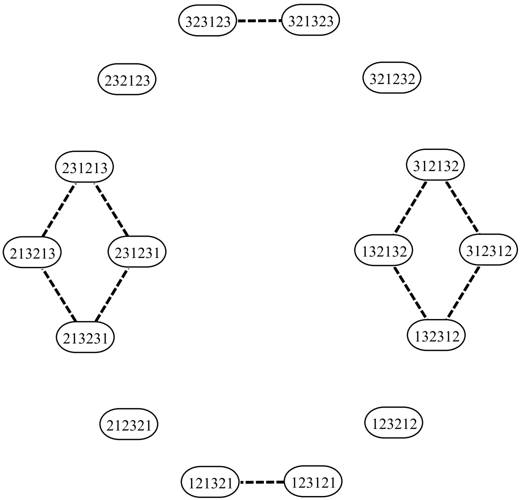
Question

Raffiner ce théorème ?

Nombre de tresses dans les classes de commutation



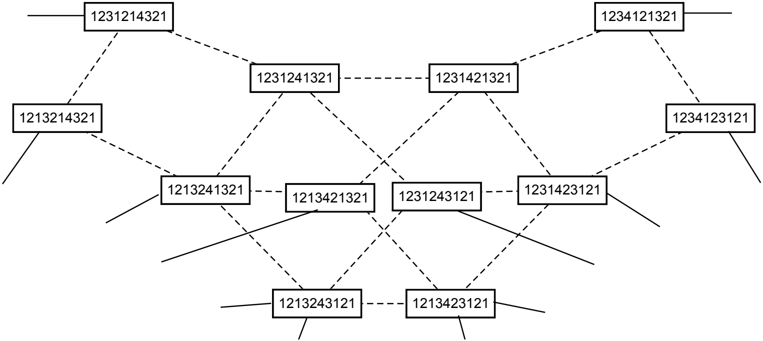
Nombre de tresses dans les classes de commutation



Classe de commutation Com(w) : comp. connexe commutations

Nombre de tresses dans les classes de commutation

Exemple ($n = 5$)



Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 123\cdots n\ \cdots 123\ 12\ 1$

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 123 \cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Conjecture (Nathan Williams '14)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 123\cdots n\ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (S., Thiéry, Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 123 \cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (S., Thiéry, Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Démonstration par les tableaux.

1. Empilements de Viennot
2. Énoncé équivalent sur les tableaux standards calés à droite
3. Bijection à coup de jeu de taquin $\square$

Nombre de tresses dans certaines classes de commutation

Mot réduit préféré : $\mathbf{w}_0 := 123 \cdots n \ \cdots 123\ 12\ 1$

Théorème (S., Thiéry, Williams, White '15)

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*

Démonstration par les tableaux.

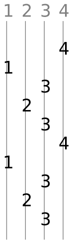
1. Empilements de Viennot
2. Énoncé équivalent sur les tableaux standards calés à droite
3. Bijection à coup de jeu de taquin $\square$

Démonstration par homomésie.

1. Action d'un groupe dihédral (promotion paire-impaire)
2. Constat expérimental : moyenne 1 sur chaque orbite
3. Bijection $\square$

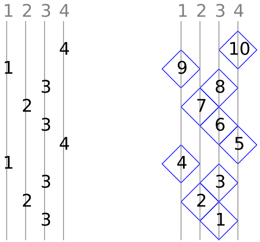
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



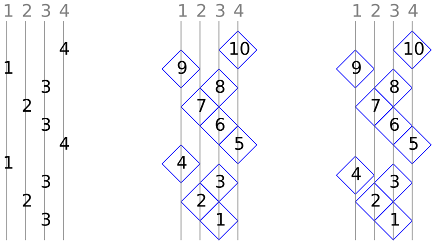
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



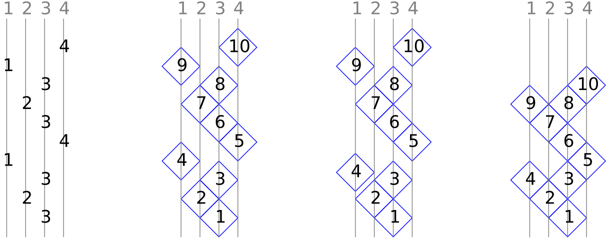
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



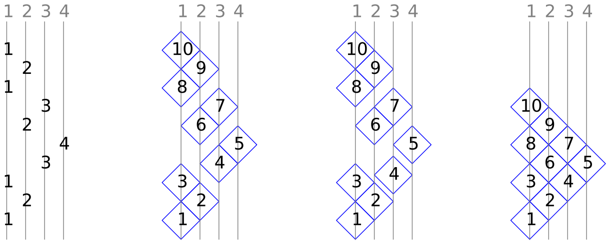
Empilements de Viennot

Exemple (mot réduit : 3231432314)



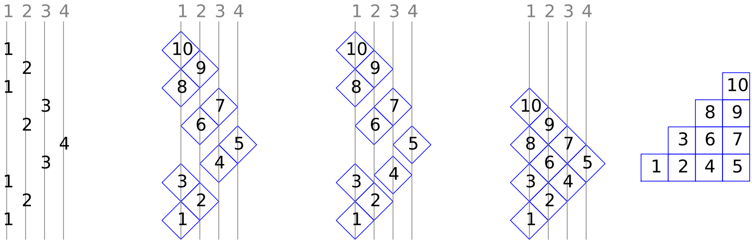
Empilements de Viennot

Exemple (mots réduits : 1213423121 and 1234123121)



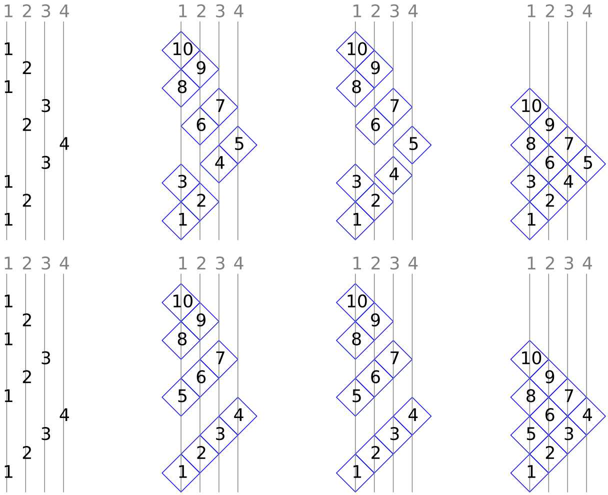
Empilements de Viennot

Exemple (mots réduits : 1213423121 and 1234123121)



Empilements de Viennot

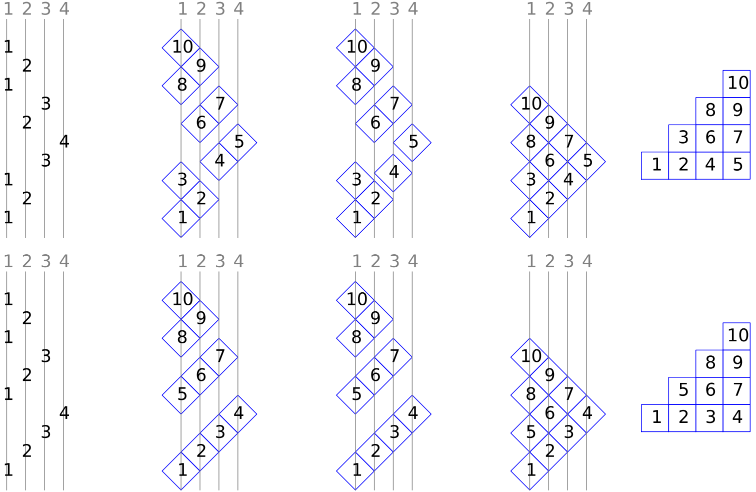
Exemple (mots réduits : 1213423121 and 1234123121)



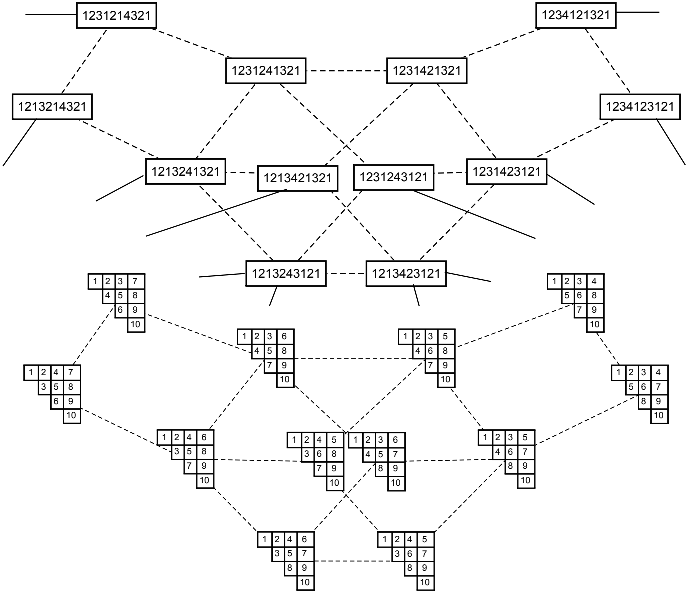
			10
		8	9
	3	6	7
1	2	4	5

Empilements de Viennot

Exemple (mots réduits : 1213423121 and 1234123121)



Tresses dans les tableaux : exemple pour $\mathfrak{S}_5$



Tresses dans les tableaux calés à droite

Les tresses $s_i s_{i+1} s_i$ et $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ donnent respectivement :

$$\begin{array}{cc} & \boxed{k+1} \\ \boxed{k-1} & \boxed{k} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} \boxed{k} & \boxed{k+1} \\ \boxed{k-1} & \end{array}$$

Tresses dans les tableaux calés à droite

Les tresses $s_i s_{i+1} s_i$ et $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ donnent respectivement :

$$\begin{array}{cc} & \multicolumn{1}{|c|}{k+1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{k-1} & \multicolumn{1}{c|}{k} \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline k & k+1 \\ \hline k-1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

C'est impossible hors diagonale !

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & k+1 \\ \hline k-1 & k \\ \hline \end{array} \qquad \text{or} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline k & k+1 \\ \hline k-1 & a \\ \hline \end{array}$$

Remarque

Seules les tresses 121 *peuvent apparaître dans* $\mathrm{Com}\mathbf{w}_0$

Énoncé équivalent sur les tableaux calés à droite

Petite équerre dans un tableau :

$$\begin{array}{|c|c|}
\cline{2-2}
\multicolumn{1}{c|}{} & k+1 \\
\hline
k-1 & k \\
\hline
\end{array}$$

Nécessairement sur la diagonale !

Énoncé équivalent sur les tableaux calés à droite

Petite équerre dans un tableau :

	$k+1$
$k-1$	k

Nécessairement sur la diagonale !

Théorème

En moyenne, un tableau standard escalier calé à droite a une petite équerre

Énoncé équivalent sur les tableaux calés à droite

Petite équerre dans un tableau :

$$\begin{array}{cc} & \boxed{k+1} \\ \boxed{k-1} & \boxed{k} \end{array}$$

Nécessairement sur la diagonale !

Théorème

En moyenne, un tableau standard escalier calé à droite a une petite équerre

Comment démontrer cela ?

Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Proposition

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

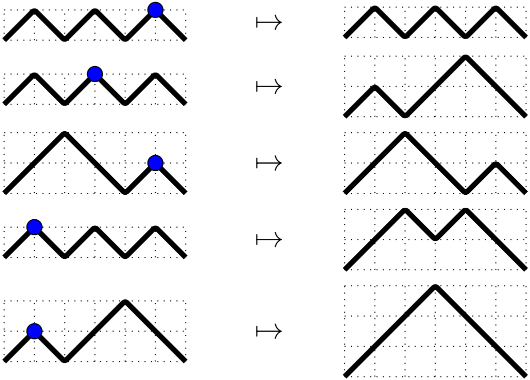
Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Proposition

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

Démonstration.

Bijection : (mot de Dyck, petit pic) $\longmapsto$ mot de Dyck



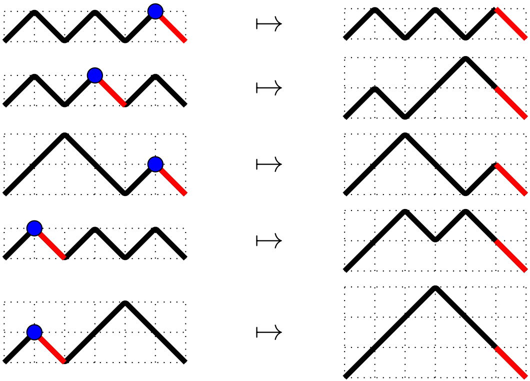
Interlude : petits pics dans les mots de Dyck

Proposition

En moyenne, un mot de Dyck a un petit pic

Démonstration.

Bijection : (mot de Dyck, petit pic) $\longmapsto$ mot de Dyck



Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

L'interlude suggère :

- Look for a bijective proof
- Utiliser un opérateur cylique sur la fin d'un tableau
- Opérateur de promotion (jeu de taquin) ?

Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

1. Partir de la petite équerre sur la diagonale

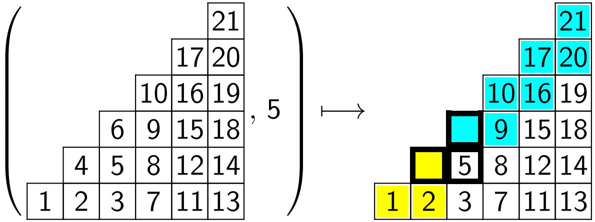
Exemple

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \cline{6-6} \multicolumn{5}{c|}{} & 21 \\ \cline{5-6} \multicolumn{4}{c|}{} & 17 & 20 \\ \cline{4-6} \multicolumn{3}{c|}{} & 10 & 16 & 19 \\ \cline{3-6} \multicolumn{2}{c|}{} & 6 & 9 & 15 & 18 \\ \cline{2-6} \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 5 & 8 & 12 & 14 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 13 \\ \hline \end{array} , 5 \right) \longmapsto \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \cline{6-6} \multicolumn{5}{c|}{} & 21 \\ \cline{5-6} \multicolumn{4}{c|}{} & 17 & 20 \\ \cline{4-6} \multicolumn{3}{c|}{} & 10 & 16 & 19 \\ \cline{3-6} \multicolumn{2}{c|}{} & \boxed{6} & 9 & 15 & 18 \\ \cline{2-6} \multicolumn{1}{c|}{} & \boxed{4} & \boxed{5} & 8 & 12 & 14 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 13 \\ \hline \end{array}$$

Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

1. Partir de la petite équerre sur la diagonale
2. Effacer les deux cases de la tresse sur la diagonale
3. Tracer le chemin de promotion (dual) par le jeu de taquin

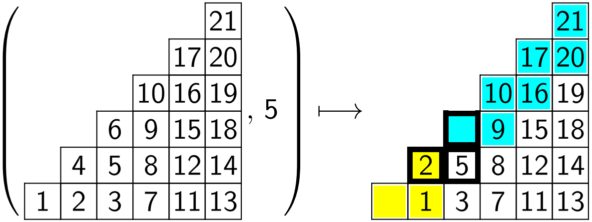
Exemple



Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

1. Partir de la petite équerre sur la diagonale
2. Effacer les deux cases de la tresse sur la diagonale
3. Tracer le chemin de promotion (dual) par le jeu de taquin
4. Faire glisser les entrées

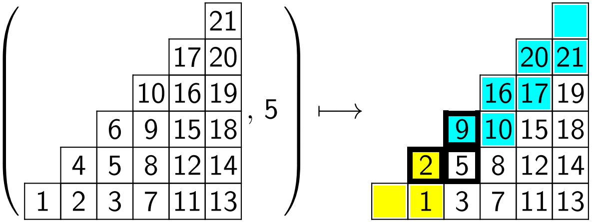
Exemple



Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

1. Partir de la petite équerre sur la diagonale
2. Effacer les deux cases de la tresse sur la diagonale
3. Tracer le chemin de promotion (dual) par le jeu de taquin
4. Faire glisser les entrées

Exemple



Bijection : (tableau, petite équerre) $\longmapsto$ tableau ?

1. Partir de la petite équerre sur la diagonale
2. Effacer les deux cases de la tresse sur la diagonale
3. Tracer le chemin de promotion (dual) par le jeu de taquin
4. Faire glisser les entrées
5. Renuméroter pour avoir un tableau standard

Exemple

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline &&&&& 21 \\ &&&& 17 & 20 \\ &&& 10 & 16 & 19 \\ && 6 & 9 & 15 & 18 \\ & 4 & 5 & 8 & 12 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 13 \\ \hline \end{array} , 5 \right) \longmapsto \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline &&&&& 21 \\ &&&& 19 & 20 \\ &&& 15 & 16 & 18 \\ && 8 & 9 & 14 & 17 \\ & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 10 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités

					21
				19	20
			15	16	18
		8	9	14	17
	3	5	7	11	13
1	2	4	6	10	12

Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités

					21
				19	20
			15	16	18
		8	9	14	17
	3	5	7	11	13
1	2	4	6	10	12

Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités

					21
				19	20
			15	16	18
		8	9	14	17
	3	5	7	11	13
1	2	4	6	10	12

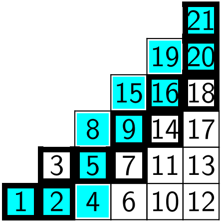
Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités

					21
				19	20
			15	16	18
		8	9	14	17
	3	5	7	11	13
1	2	4	6	10	12

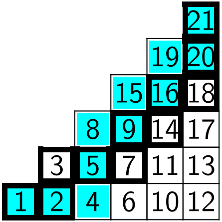
Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités
2. Où s'arrêter = retrouver k



Bijection inverse

1. Appliquer le jeu de taquin depuis les deux extrémités
2. Où s'arrêter = retrouver k



Lemma (clé combinatoire)

Dans un tableau standard escalier calé à droite, les chemins du jeu de taquin et son dual se croisent une unique fois, sur la diagonale

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Promotion

$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{N-1}$

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Promotion

$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{N-1}$

Odd and even gyration

- $\tau_o = \tau_1 \tau_3 \tau_5 \cdots$
- $\tau_e = \tau_2 \tau_4 \tau_6 \cdots$

Gyration sur les extensions linéaires d'un poset P

Involution de Bender Knuth

τ_i : échange les lettres à position i et $i+1$ si c'est possible

Promotion

$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{N-1}$

Odd and even gyration

- $\tau_o = \tau_1 \tau_3 \tau_5 \cdots$
- $\tau_e = \tau_2 \tau_4 \tau_6 \cdots$

Proposition

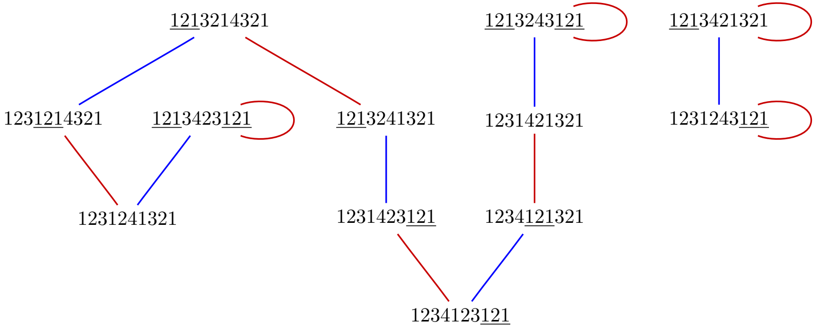
$\langle \tau_o, \tau_e \rangle$: groupe dihédral d'ordre $|P|$
L'opérateur de gyration $\tau_o \tau_e$ est un conjugé non trivial de l'opérateur de promotion

Homomésie

Théorème

En moyenne, un mot réduit de $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$ *a une tresse*
Reste vrai en se restreignant aux $\langle \tau_o, \tau_e \rangle$*-orbites !*

Exemple



Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$
\begin{array}{c}
123121 4321 \\
\downarrow \tau_o \\
1213214321 \\
\downarrow \tau_e \\
1213241321 \\
\downarrow \tau_o \\
1231423121
\end{array}
$$

Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$
\begin{array}{c}
1231214321 \\
\downarrow \tau_o \\
1213214321 \\
\downarrow \tau_e \\
1213241321 \\
\downarrow \tau_o \\
1231423121
\end{array}
$$

- $\mathbf{w}$: le mot réduit
- k : la position du milieu de la tresse
- $\tau_{o(i)} := \tau_o$ si i impair et τ_e sinon
- Renvoyer $\mathbf{w}.\tau_{o(k-2)} \cdots \tau_{o(2)}\tau_{o(1)}$

Bijection : (mot réduit, tresse) $\longmapsto$ mot réduit

Exemple

$$\begin{array}{c} 1231214321 \\ \downarrow \tau_o \\ 1213214321 \\ \downarrow \tau_e \\ 1213241321 \\ \downarrow \tau_o \\ 1231423121 \end{array}$$

- **w** : le mot réduit
- k : la position du milieu de la tresse
- $\tau_{o(i)} := \tau_o$ si i impair et τ_e sinon
- Renvoyer $\mathbf{w}.\tau_{o(k-2)} \cdots \tau_{o(2)}\tau_{o(1)}$

Préserve les orbites par construction

Bijection inverse

Exemple

i	$\mathbf{w}$	a_i	c_i	$c_i - a_i$
2	1231423121	1	3	2
3	1213241321	2	3	1
4	1213214321	1	2	1
5	1231214321	1	1	0
6	1231241321	2	1	-1
7	1213423121	2	1	-1
8	1213423121	3	2	-1
9	1231241321	3	1	-2

Bijection inverse

Exemple

i	**w**	a_i	c_i	$c_i - a_i$
2	1231423121	1	3	2
3	1213241321	2	3	1
4	1213214321	1	2	1
5	1231214321	1	1	0
6	1231241321	2	1	-1
7	1213423121	2	1	-1
8	1213423121	3	2	-1
9	1231241321	3	1	-2

Lemma (clé combinatoire)

Pour tout mot **w** *il y a exactement un i tel que $a_i = c_i$, et c'est alors une tresse*

Groupe hyperoctahédral B_n

Groupe hyperoctahédral

$\mathfrak{S}_n^B = \langle s_i \mid 1 \leq i \leq n, s_{n-1}s_ns_{n-1}s_n = s_ns_{n-1}s_ns_{n-1} \rangle$

Groupe hyperoctahédral B_n

Groupe hyperoctahédral

$\mathfrak{S}_n^B = \langle s_i \mid 1 \leq i \leq n, s_{n-1}s_ns_{n-1}s_n = s_ns_{n-1}s_ns_{n-1} \rangle$

Analogue du résultat de Reiner en type A :

Théorème (Bridget Tenner '07)

En moyenne un mot dans $\mathrm{Red}(w_0)$ *en type* B_n *a* $2 - 4/n$ *tresses*
En moyenne un mot dans $\mathrm{Red}(w_0)$ *en type* B_n *a* $\frac{2}{n^2-2}$ *longues tresses*

Groupe hyperoctahédral B_n

Groupe hyperoctahédral

$\mathfrak{S}_n^B = \langle s_i \mid 1 \leq i \leq n, s_{n-1}s_ns_{n-1}s_n = s_ns_{n-1}s_ns_{n-1} \rangle$

Analogue du résultat de Reiner en type A :

Théorème (Bridget Tenner '07)

En moyenne un mot dans $\mathrm{Red}(w_0)$ *en type* B_n *a* $2 - 4/n$ *tresses*
En moyenne un mot dans $\mathrm{Red}(w_0)$ *en type* B_n *a* $\frac{2}{n^2-2}$ *longues tresses*

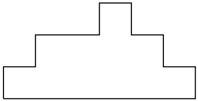
Haiman : $|\mathrm{Red}(w_0)| =$ nombre de tableaux standards de forme trapézoïdale décalée

Exemple

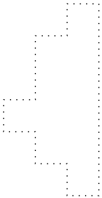
		7		
	5	6	8	
1	2	3	4	9

petite équerre $\{6, 7, 8\}$

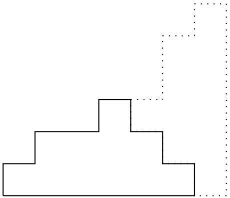
Tableaux décalés



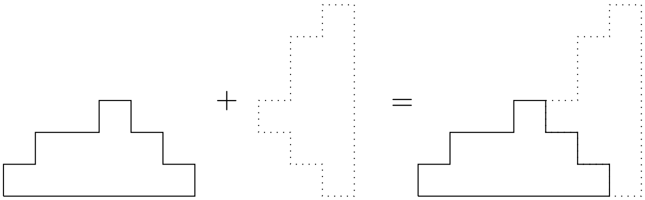
$+$



$=$

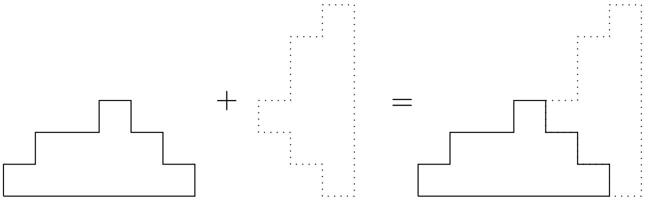


Tableaux décalés



Une forme décalée est combinée avec sa réflection pour former une forme justifiée à droite

Tableaux décalés



Une forme décalée est combinée avec sa réflection pour former une forme justifiée à droite

Théorème (S., Thiéry, Williams, White '15)

En moyenne, un tableau standard escalier décalé a $1/2$ *tresse*

Conclusion

- Démonstrations bijectives courtes par actions de groupes
- Se prête bien à l'exploration informatique
- Un des tout premier exemple d'homomésie avec un groupe dihédral

Conclusion

- Démonstrations bijectives courtes par actions de groupes
- Se prête bien à l'exploration informatique
- Un des tout premier exemple d'homomésie avec un groupe dihédral

Dynamical Algebraic Combinatorics and the Homomesy Phenomenon

Tom Roby

The term **homomesy** (Greek for "same middle") was coined by James Propp and the author to describe the following situation. Given a group action on a set of combinatorial objects, a statistic on these objects is called *homomesic* if its average value is the same over all orbits. There are many examples of this phenomenon, spread over large swaths of combinatorics, and of varying degrees of difficulty.

Questions ouvertes

- Traiter d'autres classes de commutation ?
- Bijection équivariante vers des objets combinatoires où l'action de groupe est naturelle ?
- Variance ?
  - *Reiner* conjecture que pour $\mathrm{Red}(w_0)$ la distribution est de Poisson
    
  - Ce n'est pas le cas pour $\mathrm{Com}(\mathbf{w}_0)$