(*590*) CONSTRUCTION EXPLICITE DE SURFACES ALGÉBRIQUES DONT LA PROJECTION EST IMPOSÉE

Résumé : Soit S un ensemble de $\mathbf{R}^n$ donné par des inégalités polynomiales. On construit explicitement une variété (si possible irréductible) de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont la projection sur $\mathbf{R}^n$ est S.

Thème applicatif, mots clefs : géométrie effective.

Introduction

L'inégalité $x \geq 0$ est souvent remplacée "x a une racine carrée" ou "il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $t^2 - x = 0$". C'est l'exemple le plus simple d'élimination d'une inégalité. $\mathbb{R}^+$ apparaît alors comme la projection d'un parabole.

Soit S, un ensemble de la forme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, b_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, b_n(\mathbf{x}) \geq 0, c_1(\mathbf{x}) > 0, \ldots, c_m(\mathbf{x}) > 0\},$$

où les b_i et les c_i sont des polynômes. Un tel ensemble est communément appelé *semi-algébrique*.

Le problème que nous traitons ici est de trouver un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^{p+1}$ dont la projection est exactement S. C'est, en quelque sorte, une réciproque du Théorème de projection (Tarski-Seidenberg) qui affirme que la projection d'un ensemble semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique.

Nous rappelons qu'un ensemble (variété) algébrique est l'ensemble des zéros d'un système d'équations polynomiales. Une variété est dite irréductible si elle ne peut être la réunion (non triviale) de plusieurs variétés algébriques.

Nous montrons le résultat suivant :

Proposition 1. *Il existe un polynôme irréductible $P(x_1, \ldots, x_p, t)$ tel que*

$$(x_1, \ldots, x_p) \in S \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, P(x_1, \ldots, x_p, t) = 0.$$

Nous terminons avec des exemples concrets.

Construction de polynômes adaptés

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, un paramètre et t une indéterminée de telle façon que nous puissions parler des racines de $P(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}][t]$.

Définissons les polynômes $a_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ de la façon suivante :

$$a_k(\mathbf{x}) = x_{k+1}(x_1 + \cdots + x_k),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Il est facile de voir que $a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_{n-1}(\mathbf{x}) \geq 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{+n}$ ou $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{-n}$.

Théorème 1. *Soit $P_1(x_1, u) = u - x_1$ et*

$$P_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}, u) = P_k\left(a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_k(\mathbf{x}), \left(u - (x_1 + \cdots + x_{k+1})\right)^2\right)$$

Alors les propositions suivantes sont vraies :

(i) *P_n est homogène de degré 2^{n-1}.*

(ii) *Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{+n}$, alors $P_n(\mathbf{x}, u) = 0 \Rightarrow 0 \leq u \leq 2 \sum_{i=1}^{n} x_i$.*

(iii) *Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{+n}$, alors $P_n(\mathbf{x}, t^2)$ n'a que des racines réelles.*

(iv) *Si $P_n(\mathbf{x}, t^2)$ a une racine réelle, alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{+n}$.*

(v) $P_n(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n, t) = \left[P_{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, t)\right]^2$

(vi) *P_n est irréductible dans $\mathbb{R}[\mathbf{x}, t]$ et unitaire dans chacune des variables.*

Preuve. — Montrons tout d'abord (i, ii, iii, iv) par récurrence sur n.

Supposons que ces propositions soient satisfaites au rang k. On a alors

(i) C'est vrai car a_i est homogène de degré 2.

(ii,iii) Si u est racine de $P_{k+1}(\mathbf{x}, u)$ alors $v = (u - (x_1 + \cdots + x_{k+1}))^2$ est racine de $P_k(a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_k(\mathbf{x}), v)$ et on a

$$(u - (x_1 + \cdots + x_{k+1}))^2 \leq 2(a_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_k(\mathbf{x})) \leq (x_1 + \cdots + x_{k+1})^2,$$

d'où on déduit que $0 \leq u \leq 2(x_1 + \cdots + x_{k+1})$, c'est-à-dire, les points (ii) et (iii).

(iv) Si $P_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}, t^2) = 0$ a une racine réelle alors $P_k(a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_k(\mathbf{x}), (t^2 - (x_1 + \cdots + x_{k+1}))^2)$ a aussi une racine réelle, par hypothèse de récurrence. Les $a_i(\mathbf{x})$ sont donc positifs. Supposons que tous les x_i sont négatifs, alors $P_k(a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_k(\mathbf{x}), v)$ s'annule pour

$$v \geq (x_1 + \cdots + x_{k+1})^2 \geq 2(a_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_k(\mathbf{x})).$$

Mais alors on doit avoir

$$(x_1 + \cdots + x_{k+1})^2 = 2(a_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_k(\mathbf{x})),$$

c'est-à-dire, $x_i = 0, i = 1, \ldots, k$.

(v) Par récurrence. Au rang $k+1$, posons

$$\mathbf{x}^j = (x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_{k+1}), \hat{\mathbf{x}}^j = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{k+1}).$$

On a alors

$$\begin{cases} a_i(\mathbf{x}^j) &= a_i(\hat{\mathbf{x}}^j), \text{ si } i < j-1 \\ a_{j-1}(\mathbf{x}^j) &= 0, \\ a_i(\mathbf{x}^j) &= a_{i-1}(\hat{\mathbf{x}}^j), \text{ si } i \geq j. \end{cases}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\mathbf{x}^j,t) &= P_k(a_1(\mathbf{x}^j),\dots,a_k(\mathbf{x}^j),(t-(x_1+\cdots+x_{k+1}))^2) \\ &= P_k(a_1(\hat{\mathbf{x}}^j),\dots,a_{j-2}(\hat{\mathbf{x}}^j),0,a_{j-1}(\hat{\mathbf{x}}^j),\dots,a_{n-1}(\hat{\mathbf{x}}^j),(t-(x_1+\cdots+x_{k+1}))^2) \\ &= [P_k(\hat{\mathbf{x}}^j,t)]^2 \end{aligned}$$

(vi) Toujours par récurrence. Supposons $P_k(\mathbf{x},t^2)$ irréductible. Soit

$$P_{k+1}(\mathbf{x},t^2) = A(\mathbf{x},t)\cdot B(\mathbf{x},t).$$

avec A et B unitaires en t. En substituant 0 à x_{k+1}, on obtient

$$[P_k(\mathbf{x},t^2)]^2 = A(x_1,\dots,x_n,0,t)\cdot B(x_1,\dots,x_n,0,t).$$

On a alors soit

(1) $$A(x_1,\dots,x_k,0,t) = B(x_1,\dots,x_k,0,t) = P_k(\mathbf{x},t^2),$$

soit

(2) $$A(x_1,\dots,x_k,0,t) = [P_k(\mathbf{x},t^2)]^2, B(x_1,\dots,x_k,0,t) = 1.$$

Dans le cas (1), si $\mathbf{x}\in \mathbb{R}^{+k}$, P_k a une racine réelle simple donc $\partial A/\partial t \neq 0$. Mais alors A a une une racine (en t) sur un voisinage de $(x_1,\dots,x_k,0)$ ce qui est impossible car P_{k+1} n'en a pas si $x_{k+1}<0$. Dans le cas (2), on obtient $A(\mathbf{x},t) = P_{k+1}(\mathbf{x},t^2), B(\mathbf{x},t) = 1$. $\square$

Remarques. — Il n'est pas difficile de calculer les polynômes P_i. on trouve par exemple

$$\begin{aligned} P_1(x,t^2) &= t^2 - x, \\ P_2(x,y,t^2) &= (t^2-(x+y))^2 - xy, \\ P_3(x,y,z,t^2) &= \Big(\big(t^2-(x+y+z)\big)^2 - (xy+xz+yz)\Big)^2 - xyz(x+y). \end{aligned}$$

On peut noter que les polynômes P_i ne sont pas les seuls possibles. Par exemple le polynôme $Q_2 = t^4 - 2t^2(x+y) + x^2 + y^2$ s'annule uniquement si $x,y\geq 0$.

Construction d'un ensemble algébrique

Nous déduisons, en utilisant le résultat précédent, deux théorèmes qui nous permettent de construire les variétés algébriques souhaitées.

Théorème 2. *Il existe un polynôme réel irréductible*

$$P_{n,m}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,t^2)$$

ayant une racine réelle si et seulement si tous les x_i sont positifs et tous les y_j sont strictement positifs.

Preuve. — Considérer un facteur irréductible de

$$P_{n,m}(\mathbf{x},\mathbf{y},t^2) = (y_1\cdots y_m)^{2^{m+n-1}} P_{n+m}(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{m-1},1/y_1\cdots y_m,t^2).$$

Par exemple, on trouve $P_{0,2}(b,c,t^2) = (bct^2 - b^2c - 1)^2 - b^2c$. □

Proposition 2. *Soit S un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^m$ défini par*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^p,\, b_1(\mathbf{x}) \geq 0,\ldots,b_n(\mathbf{x}) \geq 0, c_1(\mathbf{x}) > 0,\ldots,c_m(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Il existe un polynôme irréductible $P(\mathbf{x},t)$ tel que

$$\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, P(\mathbf{x},t) = 0.$$

Preuve. — Considérer un facteur irréductible non trivial de $P_{n,m}(b_i(\mathbf{x}),c_j(\mathbf{x}),t^2)$. P a une racine réelle si et seulement si $P_{n,m}$ en a. □

Remarques. — Une variété algébrique peut ne pas être irréductible bien qu'elle soit définie par un polynôme irréductible. Par exemple, prenant $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x^2-1)^2 \leq 0\}$, nous obtenons $P_2(x,y,t) = (x^2-1)^2 + t^2$ qui est irréductible.

Exemples

1. Triangle. Considérons le triangle $x \geq 0, y \geq 0, y \leq (1-x)$. On a

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - x^2 \geq 0, (1-x)y - y^2 \geq 0\}$$

et on trouve comme surface

$$(z^2 - ((x-x^2) + (1-x)y - y^2))^2 - (x-x^2)((1-x)y-y^2) = 0.$$

2. Carré. Considérons le carré de $\mathbb{R}^2$: $[0,1]^2$. On obtient alors

$$(z^2 - ((x-x^2)(y-y^2))^2 - (x-x^2)(y-y^2) = 0.$$

On aurait pu aussi choisir comme équations $(x-x^2)(y-y^2) \geq 0$ et $x^2+y^2-x-y \geq 0$.

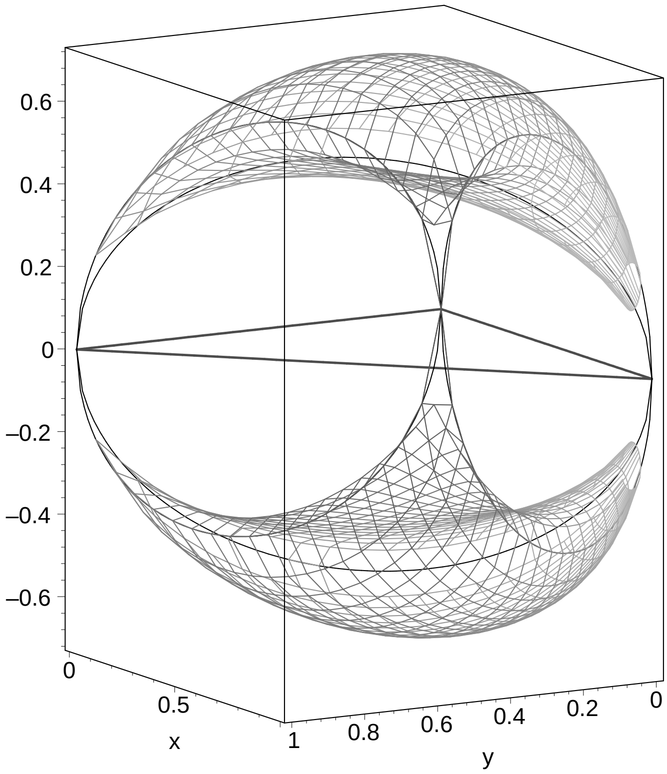

FIG. 1. Tracé de $p := (z^2 - x + x^2 - (1-x)\,y + y^2)^2 - (x - x^2)\,((1-x)\,y - y^2) = 0$

3. Cercles concentriques. Considérons les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$, on cherche une surface dont la projection est la couronne $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. On obtient par exemple, en utilisant P_1 :

$$z^2 + (x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4$$

ou en utilisant P_2 :

$$(z^2 - 3)^2 + (x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4.$$

Dans le second cas la surface a deux composantes connexes.

Indications pour les tracés

En MAPLE, le candidat pourra utiliser les commandes `plot3d`, `implicitplot3d`, `display` (qui permet de tracer plusieurs courbes ou surfaces en même temps), qui sont dans la librairie `plots`.

(*590*) Construction explicite de surfaces algébriques dont la projection est imposée

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Démontrer complètement le point (ii) du théorème **2**.
- Détailler le point (vi) du théorème **2**
- Tracer une surface de $\mathbb{R}^3$ dont la projection sur $\mathbb{R}^2$ est un carré. Quels sont les problèmes rencontrés ?
- Le candidat connaît-il d'autres surfaces de $\mathbb{R}^3$ dont la projection est la couronne $a \leq x^2 + y^2 \leq b$?
- Généraliser la construction d'une surface algébrique de $\mathbb{R}^3$, de degreé 4 en z, dont la projection est un polygone convexe inscrit dans un cercle.
- Calculer explicitement $P_{n,m}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, t)$ pour $1 \leq n + m \leq 4$.