

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DE CALCUL FORMEL

NICOLAS M. THIÉRY

1. OBJECTIFS

L'art des mathématiques consiste à trouver le cas particulier qui contient tous les germes de la généralité David Hilbert

- Outil d'exploration:
 - Manipulation d'exemples de taille conséquente
 - Évacuation des détails des calculs sans intérêt pédagogique
 - Possibilité de refaire les calculs et d'explorer autour
- Quelles mathématiques peut faire un ordinateur?

2. SYSTÈMES DE CALCUL FORMEL: QUE PEUT-T'ON FAIRE AVEC?

2.1. **Quelques systèmes de calcul formel.** Axiom, Maple, Mathematica, Maxima, MuPAD, XCAS, ...

2.2. **Calcullette / interpréteur.**

```
>> 1+1
>> x := 1+1
>> 2 * x
>> for i from 1 to 10 do
    print(i);
end_for
>> f :=
proc(n)
begin
    if n = 0 then
        1
    else
        f(n-1) * n;
    end_if;
end_proc:
>> f(0)
>> f(1)
>> f(2), f(3), f(4)
>> // debug(f(4))
```

2.3. **Calcul exact / calcul numérique (multiprécision).**

```
>> 1 + 7 / 3
>> 1.0 + 7 / 3
>> 100!
>> float(100!)
```

```
>> float(PI)
>> DIGITS := 1000:
>> float(PI)
>> DIGITS := 10:
```

2.4. Logique.

```
>> TRUE and FALSE
>> 1 < 2
>> bool(%)
>> A and not A
>> A and (A ==> B)
>> simplify(%, logic)
```

2.5. Combinatoire.

```
>> combinat::permutations([a,b,c,d])
>> combinat::cartesianProduct(
    [1,2,3,4,5,6,7,8,9,Valet,Roi,Dame],
    [Coeur,Carreau,Pique,Trefle])
>> combinat::trees(6)
>> plot(plot::Dodecahedron())
```

2.6. Algèbre linéaire.

```
>> A := matrix([[1,3],[2,7]])
>> B := matrix([[1,5,7],[-1,5,1]])
>> A * B
>> linalg::gaussElim(A);
>> A^-1;
>> equations := [ 2*x + m*y = 1,
                  x - y = -1 ];
>> solve(equations,[x, y]);
```

2.7. Calcul algébrique plus avancé.

```
>> Q := Dom::Rational:
>> Q::allCategories()
>> 1/3
>> Qx := Dom::Fraction(Dom::UnivariatePolynomial(x, Q)):
>> Qx( (1+x) / (1-x) )
>> F := Dom::AlgebraicExtension(Qx, poly(z^2 - x, [z])):
>> F(x), F(z), F(z^2)
>> F(1/(1+z))/(1-z))
>> P := Dom::UnivariatePolynomial(u, F):
>> P(u*z)*P(z)
>> P(u + x*z) * P(u - x*z)
>> factor(P(u^2 - x^3))
```

2.8. Visualisation mathématique.

```
>> plot(plot::Implicit2d(x^2 - y^2 = (x - a*y)*(x^2 + y^2),
```

2.9. Calcul symbolique.

```
>> A := matrix([[a11, a12], [a21, a22]])
>> B := matrix([[b11, b12], [b21, b22]])
>> A*B
>> linalg::det(A)
>> 1/A
```

2.10. Calcul différentiel / intégral.

```
>> diff(cos(x), x)
>> int(sin(x), x)
>> diff(f(x) * g(x), x)
>> f := ln((x - 1)/(3+x*cos(x^3 + 1)))
>> diff(f, x)
>> simplify(%)
>> hold(sum)(1/i^2, i=1..infinity)
>> sum(1/i^2, i=1..infinity)
```

2.11. Utilisation typique du calcul symbolique: prétraitement avant un calcul numérique. On veut calculer:

$$\int_0^{2\pi} \sin(10x) dx$$

```
>> monplot := plot::Function2d(sin(10*x), x = 0..2*PI):
    plot(monplot);
>> plot(monplot, plot::Hatch(monplot)):
>> numeric::int(sin(10*x), x = 0..2*PI)
>> int(sin(10*x), x=0..2*PI)
```

2.12. Composants d'un Système de Calcul Formel (Computer Algebra System):

- Arithmétique: entiers longs, corps finis, ...
- Polynômes, fractions rationnelles, matrices, ...
- Sommations, intégration, dérivation, limites symboliques, ...
- Solveurs (linéaire, polynômiaux, équations différentielles, ...)
- Lien calcul numérique
- Bases de données (nombres premiers, groupes classiques, ...)
- Langage de programmation et structures de données
(pourquoi programmer?)
- Gestion de mémoire
- Interface avec d'autres systèmes
- Interface utilisateur

3. QUELQUES RÉFÉRENCES

- MuPAD:
 - <http://www.mupad.com/>
 - <http://www.mupad.de/support/doc/40/en/>
 - Tutorial MuPAD:
 - * Bouquin (traduit en français!)
 - * Sur place: C:\Program Files\Sciface\MuPAD-4.0.0/share/doc/en/tutorium.pdf

* Poly d'introduction à la programmation scientifique avec MuPAD: http://www-lih.univ-lehavre.fr/~olivier/Enseignement/11/cours/MuPAD/support/Programmation_scientifique_polyp.pdf

- Axiom <http://wiki.axiom-developer.org/>
- Maple <http://www.maplesoft.com/>
- Mathematica <http://www.wolfram.com/>
- Maxima <http://maxima.sourceforge.net/>
- XCAS http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html

E-mail address: Nicolas.Thiery@math.u-psud.fr

URL: <http://Nicolas.Thiery.name/>