Quelques structures relationnelles de profil polynomial et leurs algèbres d'âges

Maurice Pouzet[1] Nicolas M. Thiéry[2]

[1]Laboratoire de Mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1, France

[2]Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris Sud, France

Journées de Combinatoire de Bordeaux, 5 Février 2009

Liberté académique en danger

Publicité : postes

- Postes maître de conférence et professeur à Rouen
- Contact : `Florent.Hivert@univ-rouen.fr`

Publicité : Sage-Combinat

- http://wiki.sagemath.org/combinat/
- Successeur de MuPAD-Combinat
- Plateforme internationale de développement coopératif libre pour la recherche en combinatoire (algébrique)
- Communauté :
  Abbad, Bandlow, Borie, Boussicault, Bump, Carré, Chapoton, Delecroix, Denton, Descouens, Gomez-Diaz, Hansen, Hemmecke, Hivert, Jones, Labbé, Laugerotte, Lecouvey, Lemeur, Miller, Molinero, Musiker, Novelli, Nzeutchap, Qiang, Rubey, Saliola, Schilling, Shimozono, Thiéry, Tevlin, Walker, Zabrocki, Zimmermann
- Impact : 50 publications

Objectif

1. Le *profil* d'une structure relationnelle
2. L'*algèbre d'âge* d'une structure relationnelle
3. Exemples : modélisation d'algèbres usuelles
4. Structures relationnelles avec décomposition monomorphe finie
5. Dictionnaire propriétés algébriques et combinatoires

Objectif

1. Le *profil* d'une structure relationnelle
2. L'*algèbre d'âge* d'une structure relationnelle
3. Exemples : modélisation d'algèbres usuelles
4. Structures relationnelles avec décomposition monomorphe finie
5. Dictionnaire propriétés algébriques et combinatoires

Objectif

1. Le *profil* d'une structure relationnelle
2. L'*algèbre d'âge* d'une structure relationnelle
3. Exemples : modélisation d'algèbres usuelles
4. Structures relationnelles avec décomposition monomorphe finie
5. Dictionnaire propriétés algébriques et combinatoires

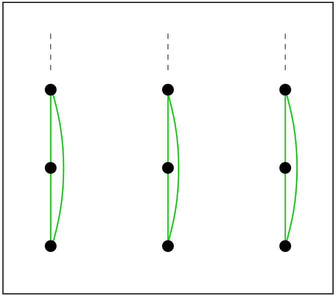
Objectif

1. Le *profil* d'une structure relationnelle
2. L'*algèbre d'âge* d'une structure relationnelle
3. Exemples : modélisation d'algèbres usuelles
4. Structures relationnelles avec décomposition monomorphe finie
5. Dictionnaire propriétés algébriques et combinatoires

Objectif

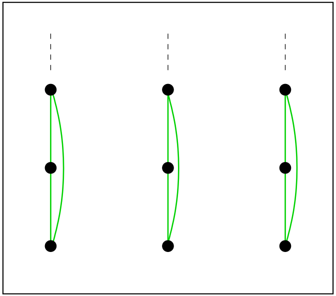
1. Le *profil* d'une structure relationnelle
2. L'*algèbre d'âge* d'une structure relationnelle
3. Exemples : modélisation d'algèbres usuelles
4. Structures relationnelles avec décomposition monomorphe finie
5. Dictionnaire propriétés algébriques et combinatoires

Exemple fondamental



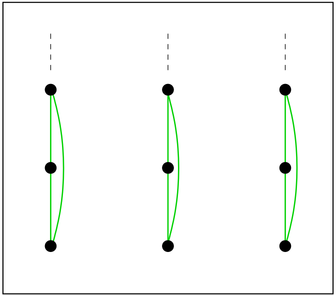
- Profil : 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, ...
- Types d'isomorphies de taille d : partitions de d en $n \leq 3$ parts
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemple fondamental



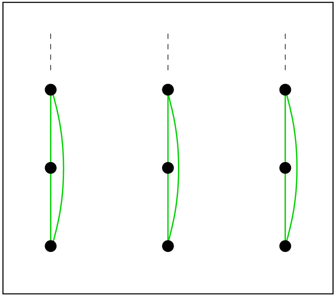
- Profil : 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, ...
- Types d'isomorphies de taille d : partitions de d en $n \leq 3$ parts
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemple fondamental



- Profil : 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, ...
- Types d'isomorphies de taille d : partitions de d en $n \leq 3$ parts
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemple fondamental



- Profil : 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, ...
- Types d'isomorphies de taille d : partitions de d en $n \leq 3$ parts
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Cadre général

- $R := (E, \rho_1, \rho_2, \dots)$: structure relationnelle
- Ensemble fini P, restriction R_P
- P isomorphe à Q s'il existe une bijection $P \leftrightarrow Q$ qui préserve R
- *Âge* : collection des *types d'isomorphie* finis (Fraïssé)
- *Profil* $\varphi_R(d)$: nombre de types d'isomorphie de taille d
- Série génératrice : $\mathcal{H}_R := \sum_{d=0}^{\infty} \varphi(d) z^d$

Exemples venant des graphes

- R : clique, coclique, chaîne, antichaîne, ...
  Profil : 1,1,1,1,. . .
  Série génératrice : $\frac{1}{1-z}$
- R : ligne
  Types d'isomorphie : partitions
  Profil : $p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$
  Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^k)\cdots}$
- R : graphe de Rado
  Types d'isomorphie : graphes non étiquetés
- R : arbre ordonné infini
  Types d'isomorphie : forêts ordonnées

Exemples venant des graphes

- R : clique, coclique, chaîne, antichaîne, ...
  Profil : 1,1,1,1,...
  Série génératrice : $\frac{1}{1-z}$
- R : ligne
  Types d'isomorphie : partitions
  Profil : $p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$
  Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^k)\cdots}$
- R : graphe de Rado
  Types d'isomorphie : graphes non étiquetés
- R : arbre ordonné infini
  Types d'isomorphie : forêts ordonnées

Exemples venant des graphes

- R : clique, coclique, chaîne, antichaîne, ...
  Profil : 1,1,1,1,. . .
  Série génératrice : $\frac{1}{1-z}$
- R : ligne
  Types d'isomorphie : partitions
  Profil : $p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$
  Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^k)\cdots}$
- R : graphe de Rado
  Types d'isomorphie : graphes non étiquetés
- R : arbre ordonné infini
  Types d'isomorphie : forêts ordonnées

Exemples venant des graphes

- R : clique, coclique, chaîne, antichaîne, ...
  Profil : 1,1,1,1,. . .
  Série génératrice : $\frac{1}{1-z}$
- R : ligne
  Types d'isomorphie : partitions
  Profil : $p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$
  Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^k)\cdots}$
- R : graphe de Rado
  Types d'isomorphie : graphes non étiquetés
- R : arbre ordonné infini
  Types d'isomorphie : forêts ordonnées

Quelques autres exemples

- $\varphi(d) = k^d$
- $\varphi(d) = \binom{n+k}{k}$
- $\varphi(d) = d!$
- $\cdots$

Proposition (Cameron)

G groupe oligomorphique agissant sur E
$\exists$ structure relationnelle sur E redonnant les mêmes orbites finies

Origine du sujet

Théorème (MP 1971)

Si E est infini, le profil est croissant

Théorème (MP 1978)

(Sous hypothèses légères) la croissance du profil est :

- *soit polynomiale :* $ad^k \leq \varphi_R(d) \leq bd^k$
- *soit plus grande que tout polynôme*

Questions

Supposons le profil polynomial
Trouver des conditions sur R pour que :

- $\varphi_R(d) \approx ad^k$?
- $\mathcal{H}_R = \frac{P(z)}{Q(z)}? = \frac{P(z)}{(1-z)(1-z^2)...(1-z^k)}$? avec $P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

Origine du sujet

Théorème (MP 1971)

Si E est infini, le profil est croissant

Théorème (MP 1978)

(Sous hypothèses légères) la croissance du profil est :

- *soit polynomiale : $ad^k \leq \varphi_R(d) \leq bd^k$*
- *soit plus grande que tout polynôme*

Questions

Supposons le profil polynomial
Trouver des conditions sur R pour que :

- $\varphi_R(d) \approx ad^k$?
- $\mathcal{H}_R = \frac{P(z)}{Q(z)}$? $= \frac{P(z)}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^k)}$? *avec* $P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

Origine du sujet

Théorème (MP 1971)

Si E est infini, le profil est croissant

Théorème (MP 1978)

(Sous hypothèses légères) la croissance du profil est :

- *soit polynomiale :* $ad^k \leq \varphi_R(d) \leq bd^k$
- *soit plus grande que tout polynôme*

Questions

Supposons le profil polynomial
Trouver des conditions sur R pour que :

- $\varphi_R(d) \approx ad^k$?
- $\mathcal{H}_R = \frac{P(z)}{Q(z)}? = \frac{P(z)}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^k)}?$ *avec* $P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

L'algèbre d'âge de Cameron

- L'*algèbre des sous-ensembles* : $(\mathbb{Q}.\mathcal{P}(E), \uplus)$
- Type d'isomorphie : $T \quad \longleftrightarrow \quad$ *somme sur orbite* : $o_T := \sum_{P\in T} P$
- L'*algèbre d'âge de* R : $\mathbb{Q}.\mathcal{A}_R := \mathbb{Q}.\{o_T\}$
  Algèbre graduée connexe
  Série de Hilbert : $\mathcal{H}_R(z)$

Problème

Relier les propriétés du profil et de l'algèbre d'âge

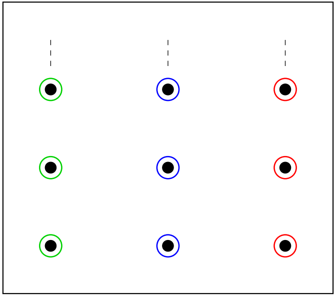
L'algèbre d'âge de Cameron

- L'*algèbre des sous-ensembles* : $(\mathbb{Q}.\mathcal{P}(E), \uplus)$
- Type d'isomorphie : $T \quad \longleftrightarrow \quad$ *somme sur orbite* : $o_T := \sum_{P \in T} P$
- L'*algèbre d'âge de* R : $\mathbb{Q}.\mathcal{A}_R := \mathbb{Q}.\{o_T\}$
  Algèbre graduée connexe
  Série de Hilbert : $\mathcal{H}_R(z)$

Problème

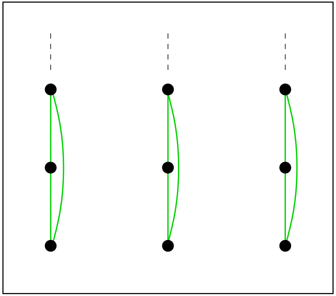
Relier les propriétés du profil et de l'algèbre d'âge

Exemples I



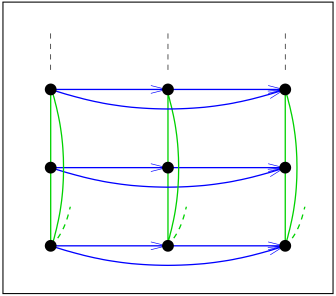
- Types d'isomorphie : vecteurs d'entiers de longueur 3
- Algèbre d'âge : polynômes en 3 variables
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1+2z+2z^2+z^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemples II



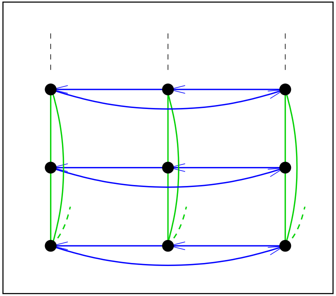
- Types d'isomorphie : partitions de d en au plus 3 parts
- Algèbre d'âge : polynômes symétriques en 3 variables
- Série génératrice : $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemples III



- Types d'isomorphie : compositions de d en au plus 3 parts
- Algèbre d'âge : polynômes quasi symétriques en 3 variables
- Série génératrice : $\frac{1+z^3+2z^4+2z^5}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exemples IV



- Types d'isomorphie : vecteurs d'entiers modulo le groupe cyclique C_3
- Algèbre d'âge : algèbre des invariants de C_3
- Série génératrice : $\frac{1+z^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Algèbre d'invariants d'un groupe de permutation

G : groupe fini agissant sur $x_1, \ldots, x_n$
$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$: algèbre des invariants

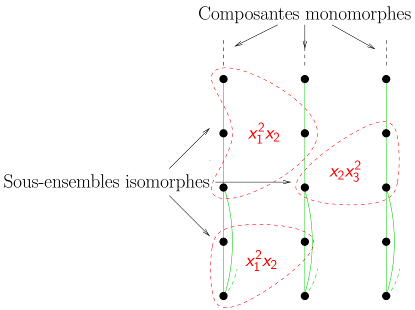
Proposition

$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ *est une algèbre d'âge !*

Théorème (Hilbert, Hochster, Eagon, ...)

- *Engendrement fini*
  Donc : $H(z) = \frac{P(z)}{(1-z^{d_1})\cdots(1-z^{d_k})}$ *avec* $P \in \mathbb{Z}[z]$
- *Cohen-Macaulay (module libre sur les polynômes symétriques)*
  Donc : $H(z) = \frac{P(z)}{(1-z)\cdots(1-z^k)}$ *avec* $P \in \mathbb{N}[z]$

Décomposition monomorphe

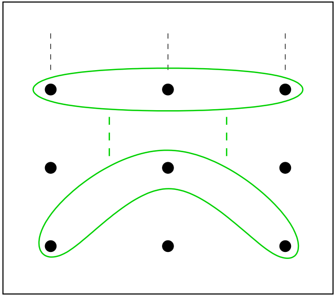


Décomposition monomorphe finie $\Longrightarrow$ croissance polynomiale
$\Longrightarrow$ (presque) sous-algèbre de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

Questions

Propriétés du profil ? De l'algèbre d'âge ?

Engendrement fini I : exemple

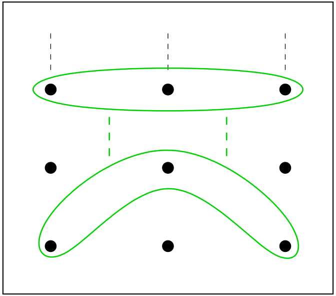


Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \ldots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini I : exemple

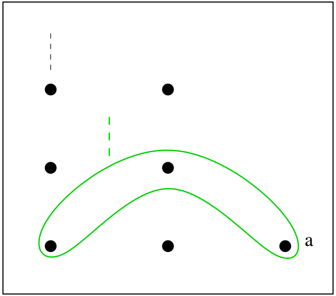


Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \ldots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini I : exemple

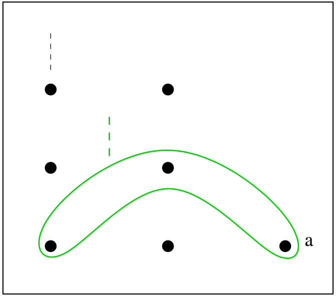


Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \ldots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini I : exemple

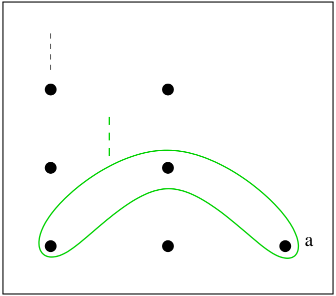


Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \dots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini I : exemple

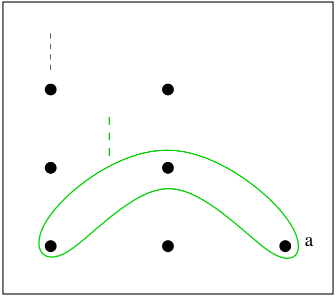


Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \ldots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini I : exemple



Proposition

L'algèbre d'âge n'est pas finiment engendrée

- Profil linéaire : $\varphi_R(d) = \max(1, d-1)$
- Sous-algèbre B ; profil constant : $1, 1, 1, \ldots$
- Finiment engendré $\Longrightarrow$ B-module de type fini
  Pourquoi ? $f \notin B$ et $g \notin B \Longrightarrow fg = 0$

Engendrement fini II : caractérisation combinatoire

Théorème

L'algèbre d'âge est finiment engendré si et seulement la décomposition monomorphe optimale est héréditaire

Démonstration.

$\Longleftarrow$: structure de module sur les fonctions symétriques (gonflées) + algèbre de Stanley-Reisner.

$\Longrightarrow$: comme dans l'exemple $\square$

Engendrement fini II : caractérisation combinatoire

Théorème

L'algèbre d'âge est finiment engendré si et seulement la décomposition monomorphe optimale est héréditaire

Démonstration.

$\Longleftarrow$: structure de module sur les fonctions symétriques (gonflées) $+$ algèbre de Stanley-Reisner.

$\Longrightarrow$: comme dans l'exemple $\square$

Propriétés du profil

Théorème

k : nombre de composantes monomorphes infinies

$\mathcal{H}_R(z) = \frac{P(z)}{(1-z)\cdots(1-z^k)}$

Démonstration.

Ordre d'élimination + algèbre de Stanley-Reisner □

Théorème

$\varphi_R \approx a d^{k-1}$

Problème

$P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

Propriétés du profil

Théorème

k : nombre de composantes monomorphes infinies

$\mathcal{H}_R(z) = \frac{P(z)}{(1-z)\cdots(1-z^k)}$

Démonstration.

Ordre d'élimination + algèbre de Stanley-Reisner □

Théorème

$\varphi_R \approx ad^{k-1}$

Problème

$P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

Propriétés du profil

Théorème

k : nombre de composantes monomorphes infinies

$\mathcal{H}_R(z) = \frac{P(z)}{(1-z)\cdots(1-z^k)}$

Démonstration.

Ordre d'élimination + algèbre de Stanley-Reisner □

Théorème

$\varphi_R \approx ad^{k-1}$

Problème

$P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

Propriétés du profil

Théorème

k : nombre de composantes monomorphes infinies

$\mathcal{H}_R(z) = \frac{P(z)}{(1-z)\cdots(1-z^k)}$

Démonstration.

Ordre d'élimination + algèbre de Stanley-Reisner $\square$

Théorème

$\varphi_R \approx a d^{k-1}$

Problème

$P(z) \in \mathbb{N}[z]$?

La propriété de Cohen-Macaulay

Théorème (Hochster, Eagon 1971)

Les algèbres d'invariant sont Cohen-Macaulay

Théorème (Garsia 2005)

Les (r)-polynômes quasi symétriques sont Cohen-Macaulay

Problème

Caractérisation combinatoire des algèbre d'âges de Cohen-Macaulay ?

La propriété de Cohen-Macaulay

Théorème (Hochster, Eagon 1971)

Les algèbres d'invariant sont Cohen-Macaulay

Théorème (Garsia 2005)

Les (r)-polynômes quasi symétriques sont Cohen-Macaulay

Problème

Caractérisation combinatoire des algèbre d'âges de Cohen-Macaulay ?

La propriété de Cohen-Macaulay

Théorème (Hochster, Eagon 1971)

Les algèbres d'invariant sont Cohen-Macaulay

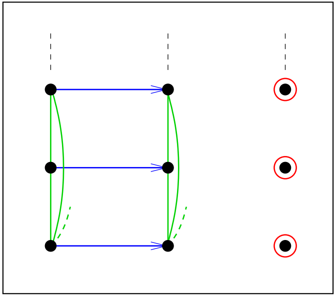
Théorème (Garsia 2005)

Les (r)-polynômes quasi symétriques sont Cohen-Macaulay

Problème

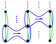
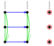
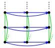
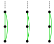
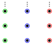
Caractérisation combinatoire des algèbre d'âges de Cohen-Macaulay ?

Exemple non Cohen-Macaulay



- Anneau des invariants d'un groupoide d'isomorphismes locaux !

Synthèse des résultats

	Structure relationnelle	isomorphismes locaux	Série de Hilbert	Engendrement fini	Borne sur le degré	dimension de Krull	Sym-module	Cohen-Macaulay	SAGBI finie
$\lvert X\rvert < \infty$			$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{Z}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X_\infty \rvert})}$	jamais [a]	$= \infty$ [a]	$\leq \lvert X_\infty \rvert$	non [b]	non [b]	non [b]
Optimalement héréditaire			$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{Z}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X_\infty \rvert})}$	oui	$< \infty$	$\lvert X_\infty \rvert$	presque	non [b]	non [b]
Formes préservées			$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{Z}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X_\infty \rvert})}$	oui	$< \infty$	$\lvert X_\infty \rvert$	oui	non [b]	non [b]
Polynômes r-quasi-symétriques [Hiv04]			$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{N}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	$\leq \frac{\lvert X\rvert(\lvert X\rvert+2r-1)}{2}$	$\lvert X\rvert$	oui	oui	non
Invariants d'un groupoide de permutations G		$G \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{Z}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	$\leq \frac{\lvert X\rvert(\lvert X\rvert+1)}{2}$	$\lvert X\rvert$	oui	non [b]	jamais [a]
Exemple non Cohen-Macaulay		$\langle 1 \mapsto 2\rangle \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{1+Z^2+Z^3-Z^4}{(1-Z)^2(1-Z^2)}$	oui	2	$\lvert X\rvert$	oui	non	non
Polynômes quasi-symétriques [Ges84]		$\mathrm{Inc} \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{P(Z) \leftarrow \in \mathbb{N}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	$\leq \frac{\lvert X\rvert(\lvert X\rvert+1)}{2}$	$\lvert X\rvert$	oui	oui [GW05]	non
Invariants d'un groupe de permutations G		$G \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{P(Z) \leftarrow \in \in \mathbb{N}[Z]}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	$\leq \frac{\lvert X\rvert(\lvert X\rvert-1)}{2}$	$\lvert X\rvert$	oui	oui	jamais [a] [TT04]
Polynômes symétriques		$\mathfrak{S} \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{1}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	$\lvert X\rvert$	$\lvert X\rvert$	oui	oui	oui
Polynômes		$\mathrm{id} \wr \mathfrak{S}[\mathbb{N}]$	$\frac{(1+Z)\cdots(1+Z+\cdots+Z^{\lvert X \rvert})}{(1-Z)\cdots(1-Z^{\lvert X \rvert})}$	oui	1	$\lvert X\rvert$	oui	oui	oui

a. sauf mention contraire explicite dessous

b. Ici, "non" signifie "pas toujours" ; il y a des exemples et des contre-exemples