(*public-2013*)

Résumé : Dans ce texte, on présente une méthode de compression de fichiers, utilisée notamment en photographie numérique, et souvent plus efficace que les méthodes traditionnelles basées sur la transformée de Fourier.

Mots clefs : algèbre linéaire, polynômes

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction

Lorsqu'on prend une photo avec un appareil photo numérique, il la transforme en général en un fichier compressé, qui occupe moins de place que l'image initiale.

Pour se donner une idée des taux de compression que l'on obtient actuellement, prenons une photo avec un appareil de 10 millions de pixels. Chaque pixel contient l'information sur les trois couleurs (rouge, vert, bleu), codées chacune sur un octet. Trois octets sont donc associés à chaque pixel, et l'image "pèse" environ 30 mégaoctets.

Avec des procédés du type que nous décrivons dans les paragraphes suivants, on peut ramener chaque image à n'occuper que deux ou trois mégaoctets, sans perte significative de qualité.

2. L'idée générale

Avant de décrire précisément la première méthode (dite D_2) dans le paragraphe suivant, donnons-en l'idée générale :

si I_0 est l'image initiale, on lui fait subir une première transformation, qui consiste en quelque sorte à changer d'échelle, en se plaçant deux fois plus loin : on obtient ainsi une image I_1, deux fois moins précise (et qui occupe donc en moyenne deux fois moins de place), mais on garde en mémoire, dans un fichier J_1, les détails supprimés. Puis on fait subir à I_1 la même transformation, d'où une image I_2 deux fois moins précise que I_1, et un fichier J_2 de détails, etc. Au bout de n transformations, on aura une image I_n très grossière, comme si on voyait I_0 de très loin, et des fichiers de détails $J_1, J_2, \ldots, J_n$.

Si on garde intégralement les détails à chaque étape, on peut reconstruire à l'identique l'image initiale ; le simple fait d'avoir procédé à ces transformations successives est déjà souvent en soi une compression des données initiales : dans le cas extrême où l'image représente, par exemple, une page blanche, les fichiers de détails sont vides.

Plus généralement, si l'image ne comporte pas trop de changements brusques de couleurs ou de formes, les fichiers de détails successifs comportent beaucoup de 0, et sont donc de petite taille, car on peut stocker une suite de 0 en indiquant simplement la longueur de la suite.

Dans le cas général d'une image avec de forts contrastes, on doit néanmoins, pour obtenir des taux de compression significatifs, ramener à 0 certains coefficients des fichiers de détails, s'ils sont "suffisamment" petits. On a alors affaire à une compression "avec pertes", d'autant plus brutale qu'on s'autorise à ramener à 0 des nombres de plus en plus gros.

3. La transformation D_2

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction, échantillonnée par pas de $1/2^n$; on connaît donc la suite des valeurs $(f(i/2^n))$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Pour fixer les idées, prenons par exemple $n = 4$, et soit $A_1 = [s_0 s_1 \ldots s_{15}]$ les 16 valeurs de l'échantillon.

La *transformation* D_2 consiste à prendre les moyennes $s_{0,1} = (s_0 + s_1)/2, s_{2,3} = (s_2 + s_3)/2$, etc. ainsi que les différences $d_{0,1} = (s_0 - s_1)/2, d_{2,3} = (s_2 - s_3)/2, \ldots$. On obtient une seconde suite

$$A_2 = [s_{0,1}; s_{2,3}; \ldots; s_{14,15}; d_{0,1}; \ldots; d_{14,15}]$$

dont la longueur est toujours 16, et qui permet bien sûr de retrouver la suite A_1. Les huit premiers termes correspondent à un changement d'échelle de l'échantillon initial, en en donnant une vision deux fois plus grossière, plus *lissée*, et les huit derniers consistent en les "détails" qui ont été supprimés lors de ce changement d'échelle.

On continue le processus en appliquant la transformation ci-dessus aux 8 premiers termes de la nouvelle suite, et en gardant les 8 derniers, d'où une suite A_3 dont les quatre premiers termes consistent en des moyennes, et ainsi de suite jusqu'à une suite A_5, dont le premier terme consiste en la moyenne des termes de A_1, et les autres termes sont des différences de termes des suites précédentes.

On peut bien sûr revenir de la suite A_5 à la suite A_1, en effectuant les transformations inverses.

Pour voir l'intérêt de cette transformation, prenons un exemple : si l'échantillon initial est

$$123, 122, 124, 124, 128, 129, 134, 137, 140, 142, 145, 147, 153, 155, 156, 155,$$

les suites successives sont :

$$\begin{array}{l}
122.5, 124, 128.5, 135.5, 141, 146, 154, 155.5, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
123.25, 132, 143.5, 154.75, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
127.625, 149.125, -4.375, -5.625, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
138.375, -10.75, -4.375, -5.625, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5
\end{array}$$

Notre échantillon étant assez régulier, on en obtient ainsi déjà une compression non négligeable (en base 2, on divise presque par 2 le nombre de chiffres à stocker) et ceci sans perte, puisqu'on n'a perdu aucune information au cours des transformations D_2 que l'on a effectuées.

Si maintenant on annule, dans la dernière suite, les termes de valeur absolue < 1, on obtient

$$138.375, -10.75, -4.375, -5.625, 0, -3.5, -2.5, 0, 0, 0, 0, -1.5, -1, -1, -1, 0$$

et, en faisant les transformations inverses, l'echantillon initial devient (une fois le résultat final arrondi)

$$[123, 123, 123, 123, 129, 129, 134, 137, 140, 142, 145, 147, 154, 156, 155, 155]$$

soit une erreur relative inférieure à 0.003.

Si maintenant, on annule les termes de valeur absolue ≤ 1.5, on trouve

$$[138.375, -10.75, -4.375, -5.625, 0, -3.5, -2.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

qui donne après avoir effectué les transformations inverses

$$[123, 123, 123, 123, 129, 129, 136, 136, 141, 141, 146, 146, 155, 155, 155, 155],$$

d'où cette fois une erreur relative d'environ 6%.

REMARQUE.- Si l'on note $h_0 = h_1 = 1/2$ et $g_0 = -g_1 = 1/2$, on a, avec les notations ci-dessus, $s_{01} = h_0 a_0 + h_1 a_1, d_{01} = g_0 a_0 + g_1 a_1$, etc. De plus, les vecteurs (h_0, h_1) et (g_0, g_1) sont orthogonaux. Le vecteur (h_0, h_1) est celui qui permet de changer l'échelle de l'échantillon initial, et le vecteur (g_0, g_1) permet de calculer les détails qui sont alors supprimés. Ce sont ces "facteurs d'échelle" (h_i) et ces facteurs de détails (g_i) que nous généralisons dans les paragraphes 5 et 6.

4. Une interprétation de la transformation D_2

Soit I l'intervalle $[0, 1[$; pour tout entier $p \geq 0$, soit E_p l'espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbf{R}$ constantes sur chaque intervalle $[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[$, $0 \leq k < 2^p$.

On obtient ainsi une suite d'espaces vectoriels emboîtés $E_0 \subset E_1 \ldots \subset E_p \ldots$. Notons E leur union, et soit $< f, g >$ le produit scalaire sur E défini par $< f, g >= \int_0^1 f(t) g(t) dt$.

Une base orthogonale de E_p est formée des fonctions $\Phi_{p,k}$, $0 \leq k < 2^p$, fonctions caractéristiques de l'intervalle $[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[$.

Comme $E_p \subset E_{p+1}$, on peut considérer l'orthogonal F_p de E_p dans E_{p+1}, dont une base orthogonale est formée de la restriction à I des fonctions $\Psi_{p,k}$, $0 \leq k < 2^p$, définies par $\Psi_{p,k}(x) = \Psi(2^p x - k)$, où $\Psi :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est elle-même définie par

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1 \ \text{ si } \ x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, de proche en proche, on a $E_p = E_0 \oplus F_0 \oplus F_1 \ldots \oplus F_{p-1}$, et la décomposition D_2 décrite dans le paragraphe précédent n'est autre que l'écriture d'une fonction de E_p, écrite initialement dans la base des $\Phi_{p,k}$, dans la base formée de Φ_0 et des $\Psi_{j,k}$, $0 \leq j \leq p-1, 0 \leq k < 2^j$.

Notons que, quitte à remplacer les $\Psi_{p,k}$ et $\Phi_{p,k}$ par des fonctions proportionnelles, on obtient des bases orthonormées des E_p et F_p. La matrice de passage correspondant à la transformation D_2 est alors orthogonale, et la transformation D_2 inverse n'est autre que sa transposée. Mais les coefficients comportent alors d'inesthétiques $\sqrt{2}$.

5. La transformation D_4

Nous décrivons dans ce paragraphe une autre transformation, la transformation D_4, qui, sur des échantillons de fonctions affines, est telle que les différences sont nulles (alors qu'avec D_2, les différences d_{ij}, etc. ne sont toutes nulles que si la suite initiale est constante).

Soit

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$g_0 = h_3, g_1 = -h_2, g_2 = h_1, g_3 = -h_0.$$

La transformée D_4 est donnée par les formules suivantes (où la suite $\{s_0, \ldots, s_{4^n-1}\}$ est indicée par le groupe $\mathbf{Z}/4^n\mathbf{Z}$) :

$$a_i = h_0 s_{2i} + h_1 s_{2i+1} + h_2 s_{2i+2} + h_3 s_{2i+3}, d_i = g_0 s_{2i} + g_1 s_{2i+1} + g_2 s_{2i+2} + g_3 s_{2i+3}.$$

Ici, comme dans le cas de la transformation D_2, les (a_i) sont des moyennes, et les d_i représentent des différences (les "détails" supprimés lors de la transformation).

À chaque étape, on passe d'une suite $\{s_i\}$ à la suite formée des a_i, suivie des d_i, puis on repète la dernière moitié des coefficients de la suite $\{s_i\}$.

Par exemple, sur un échantillon de 8 valeurs, cette transformation est donnée par la matrice suivante :

$$D_4 = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant orthogonale, la transformation inverse est obtenue par sa transposée.

Comme nous l'avons dit en début de section, cette transformation a sur la transformation D_2 la supériorité d'être "sans perte" sur des échantillons provenant d'une fonction affine, en ce sens que les d_i sont nuls pour de tels échantillons.

6. Le cas général

6.1. *Le polynôme H associé aux suites d'échelle (h_i)*

Dans les sections précédentes, on a construit une suite d'échelle h_i et une suite de différences g_i, où la suite g_i s'obtient à partir de h_i par la formule $g_i = (-1)^i h_{2A-1-i}$, avec $A = 1$ pour D_2 et $A = 2$ pour D_4.

Dans le cas général, on procède de même pour construire une transformation D_{2A}, analogue à celles des paragraphes précédents, mais approchant d'autant mieux que A est grand des échantillons provenant de polynômes. Plus précisément, soit A un entier ≥ 1 ; on cherche une suite infinie $G = (g_i)$, $i \in \mathbf{Z}$, nulle pour $i \notin [0, 2A-1]$, telle que :

(1) Si un échantillon de $2A$ valeurs $\{p_0, \dots, p_{2A-1}\}$ provient d'un polynôme q de degré $< A$, i.e. tel que $p_i = q(\frac{i}{2A})$ pour $0 \leq i < A$, on a

$$\sum_{i=0}^{2A-1} g_i p_i = 0.$$

(2) La suite G est orthogonale à ses translatés (g_{i+2k}), i.e. pour tout k on a

$$\sum_{i=0}^{2A-1} g_i g_{i+2k} = 0.$$

(3) Afin de normaliser les coefficients, on veut de plus que $\sum_{i=0}^{2A-1} (-1)^i g_i = 2$.

Plutôt que de chercher la suite des différences g_i, on cherche celle des échelles h_i. Soit donc H le polynôme défini par $H(Z) = \sum_{i \geq 0} h_i Z^i$. La condition (3) s'écrit alors $H(1) = 2$, et la condition (1) est alors équivalente au fait que $(Z+1)^A$ divise H.

Il existe donc p de degré $\leq A-1$, avec $p(1) = 1$, et tel que $H(Z) = 2^{1-A}(Z+1)^A p(Z)$. Au lieu de $2A$ coefficients h_i indéterminés, on n'en a plus que A, pour lesquels on écrit les $A-1$ conditions (2).

- Pour $A = 1$, il n'y a pas de condition, et $H(Z) = Z + 1$.
- Pour $A = 2$, p est de degré 1, avec $p(1) = 1$, donc de la forme $p(Z) = p_1 Z + 1 - p_1$, et la condition (2) (ou la condition $\sum h_i^2 = 2$) est $2p_1^2 - 2p_1 - 1$, d'où deux suites d'échelle (h_i), l'une des deux donnant D_4, à renormalisation près.
- Pour $A = 3$, (2) donne deux conditions, et un calcul de résultant permet de trouver les polynômes p solutions.

Donc, pour A petit, il n'est pas difficile d'obtenir les suites (g_i) vérifiant les conditions ci-dessus.

6.2. *Interprétation de la condition (2)*

Pour A grand, l'élimination des coefficients proposée dans la section précédente s'avère de plus en plus lourde. Nous montrons ici comment obtenir plus simplement le(s) polynôme(s) p cherchés.

La condition (2) est équivalente au fait que

$$H(Z)H(Z^{-1})+H(-Z)H(-Z^{-1})=4.$$

Cette expression est invariante par $Z\mapsto Z^{-1}$; par suite, en posant $X=\frac{1}{2}(2-Z-Z^{-1})$, on peut l'écrire

$$(2-X)^A P(X)+X^A P(2-X)=2^A,$$

où $P(X)=p(Z)p(1/Z)$ est un polynôme de degré $\le A-1$.

Comme $\deg P<A$, on peut trouver P par l'algorithme d'Euclide étendu, en effectuant la division euclidienne de $(2-X)^A$ par X^A. On a même une formule explicite pour P : en tronquant la série $(\frac{1}{1-X})^A=\sum_{i\ge 0}C_{A-1+i}^{A-1}X^i$ à l'ordre A, on obtient

$$P(X)=\sum_{i=0}^{A-1}C_{A-1+i}^{A-1}2^{-i}X^i,$$

où C_n^p est le nombre des parties à p élément d'un ensemble à n éléments.

Reste à retrouver p, qui est défini par $P(X)=p(Z)p(Z^{-1})$. Pour cela, on remarque que, si (α_i) est la suite des racines de P, les racines de p sont une partie à $A-1$ éléments de l'union des racines β_i et β_i' de $Z^2+2Z(\alpha_i-1)+1$, avec $|\beta_i|<1$ et $|\beta_i'|>1$, choisies de telle manière que p soit à coefficients réels. Le choix fait d'ordinaire est de prendre les β_i comme racines de p, et d'appeler D_{2A} la transformation associée.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- On pourra expliciter les formules permettant de trouver la transformation inverse de D_2 (qui permet, à partir de A_n, de retrouver A_{n-1}).
- On pourra illustrer ce texte à l'aide d'un logiciel de calcul formel, en calculant la transformation D_2 sur divers types d'échantillons, plus ou moins réguliers ; en annulant les coefficients "de détail" plus ou moins brutalement, on pourra montrer les dégradations obtenues par rapport à l'image initiale.
- Toujours à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on pourra retrouver les coefficients h_i de D_4, à l'aide de la construction générale de 6.1

  On pourra de même calculer les coefficients D_{2A}, pour A un peu plus grand $(3,4,5\ldots)$, par la méthode suggérée en 6.2
- On pourra démontrer les affirmations sans démonstration qui émaillent le texte, notamment dans le paragraphe 4, et dans le paragraphe 6.