Travaux Dirigés Polynômes n°1

Cours de Combinatoire et Calcul algébrique

—Master MPRI—

Interpolation / Différences finies / Polynômes de Newton

La méthode des différences finies permet entre autre de calculer itérativement les valeurs prises par un polynôme sur les entiers sans faire aucune multiplication après un pré-calcul. Cette méthode est également très utilisé en calcul numérique pour calculer des approximations des dérivées.

Pour $n+1$ couples (x_i, y_i), on cherche une fonction Φ telle que $\Phi(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le n$. Dans le cas de l'interpolation polynomiale, on cherche la fonction Φ sous la forme d'un polynôme. On ramène donc le problème à chercher un polynôme P de degré n tel que $P(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le n$.

1 Interpolation de Lagrange

▸ Exercice 1. (Existence et unicité)

Montrer qu'étant donné $n+1$ couples distincts $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ tels que $x_i \ne x_j$ il existe un unique polynôme P de degré n tel que $P(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le n$. On admettra la formule suivante qui donne le déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots x_1^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \tag{1}$$

Application : Calculer le polynôme interpolant en remplaçant les coordonnées des points dans l'expression du polynôme et résoudre le système linéaire : Trouver le polynôme interpolant une fonction passant par les points $(-1, 2), (1, 4), (3, 2)$ et $(5, 1)$.

▸ Exercice 2. (Deuxième méthode : méthode de Lagrange)

Le polynôme interpolateur de Lagrange est de la forme

$$\Pi(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{2}$$

où les

$$L_i(x) := \prod_{j=0,\ j\ne i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ . \tag{3}$$

sont appelés polynômes caractéristiques de Lagrange.

1. Montrer que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_k) = 0$ si $i \ne k$.
2. En déduire que pour $n+1$ couples distincts $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, le polynôme de Lagrange réalise bien une interpolation.
3. Calculer le polynôme interpolant de la fonction passant par les points $(-1, 3), (0, 1), (1, 2), (3, -1)$ et $(4, -5)$.

2 Différences finies

Soit $P(X)$ un polynôme. L'opérateur de différence finie noté Δ agit sur le polynôme $P(X)$ par

$$\Delta P(X) := P(X+1) - P(X)\,. \tag{4}$$

▸ **Exercice 3. Quelques propriétés de l'opérateur Δ**

1. Soit $Q(X) := X^3 + 2X^2 + X + 2$. Calculer $\Delta Q(X)$.
2. Montrer que Δ est linéaire, c'est-à-dire que si a et b sont des constantes et si $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes, alors
$$\Delta(aP(X) + bQ(X)) = a\Delta P(X) + b\Delta Q(x)\,. \tag{5}$$
3. Montrer que pour deux polynômes P et Q, on a
$$\Delta(P(X)Q(X)) = Q(X+1)\Delta P(X) + P(X)\Delta Q(X)\,. \tag{6}$$

▸ **Exercice 4. Itération de l'opérateur Δ**

On définit par récurrence $\Delta^0 P(X) := P(X)$ et $\Delta^{n+1}P(X) := \Delta(\Delta^n P(X))$ pour tout $n \geq 0$.

4. En reprenant le polynôme $Q(X)$ de l'exercice 1, Calculer $\Delta^n Q(X)$ pour tout les $n \geq 0$. Que remarquez vous ?
5. Montrer généralement, que si $P(X) := \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ est un polynôme de degré d (i.e. : $a_d \neq 0$), alors $\Delta P(X)$ est un polynôme de degré $d-1$. Quel est le coefficient dominant de $\Delta P(X)$?
6. En déduire que $\Delta^d P$ est un polynôme constant égal à $d!a_d$.

▸ **Exercice 5. Calcul des valeurs d'un polynôme sur les entiers**

7. Soit $P = aX + b$ un polynôme de degré 1 donné par $P(0)$ et $P(1)$. Quel est le polynôme ΔP ? Est-il possible sans calculer $P(X)$ de calculer $P(2), P(3), \dots$?
8. Si $P = aX^2 + bX + c$ est un polynôme de degré 2 donné par $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. Comment calculer $\Delta^2 P$? Comment calculer $\Delta P(2), \Delta P(3), \Delta P(4) \dots$? Comment calculer $P(3), P(4), \dots$?
9. Soit $P(X)$ un polynôme de degré d dont on connait les valeurs en 0, 1, …, d. Comment calculer sans aucune multiplication a_d ?
10. Donner un algorithme qui calcule sans aucune multiplication les valeurs de P en $d+1, d+2, \dots$

▸ **Exercice 6. Test de logique**

Continuer les suites suivantes

11. $U = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$;
12. $V = 1, 5, 11, 19, 29, \dots$;
13. $W = 1, 9, 29, 67, 129, 221, \dots$;
14. $X = 1, 13, 73, 241, 601, 1261, 2353, \dots$;

▸ **Exercice 7. Polynômes de Newton**

Pour tout $n \leq 0$, on appelle polynôme de Newton d'ordre n le polynôme

$$A_n(X) := \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)\dots(X-n+1)}{n!} \tag{7}$$

15. Quel est le degré de $A_n(X)$?
16. Montrer que pour $n > 0$ on a $\Delta A_n(X) = A_{n-1}(X)$.
17. Montrer que pour tout polynôme $P(X)$ de degré d il existe un unique $d+1$-uplets de coefficients $(c_0, \dots c_d)$ tels que
$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} c_i A_n(X)\,. \tag{8}$$
18. Comment calculer efficacement les c_i ?
19. En déduire un algorithme d'interpolation d'une fonction f dont on connaît les valeurs sur les entiers 0, 1, ..., n.