CHAPTER 1

Notions de complexité

PROBLEM 1.0.1. Comparaison de la complexité de deux méthodes de tri.
On a une liste que l'on veut trier, mettons $7, 8, 4, 2, 5, 9, 3, 5$.
– Méthode 1 (tri sélection)

(1) On échange le premier élément avec le plus petit des éléments $2, 8, 4, 7, 5, 9, 3, 5$
(2) On échange le deuxième élément avec le plus petit des éléments restants $2, 3, 4, 7, 5, 9, 8, 5$
(3) ...
(4) Au bout de k étapes, les k premiers éléments sont triés ; on échange alors le $k + 1$ème élément avec le plus petit des éléments restants.
(5) À la fin, la liste est triée : $2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9$.

– Méthode 2 (tri fusion)

(1) On groupe les éléments par paquets de deux, et on trie chacun de ces paquets : $7, 8, 2, 4, 5, 9, 3, 5$.
(2) On groupe les éléments par paquets de quatres, et on trie chacun de ces paquets : $2, 4, 7, 8, 3, 5, 5, 9$.
(3) ...
(4) Au bout de k étapes, les paquets de 2^k éléments sont triés ; on les regroupe par paquets de 2^{k+1} que l'on trie.
(5) À la fin, tous les éléments sont dans le même paquet et sont triés : $2, 4, 7, 8, 3, 5, 5, 9$.

Quelle est la meilleure méthode ?

EXERCICE 1. Évaluer au mieux la complexité des problèmes suivants :

(1) Calcul de $n!$;
(2) Calcul du n-ième nombre de Fibonacci ;
(3) Recherche d'un mot dans un dictionnaire ;
(4) Calcul du pgcd de deux nombres ;
(5) Calcul du produit de deux matrices ;
(6) Calcul du déterminant d'une matrice ;
(7) Calcul du rang d'une matrice ;
(8) Inversion d'une matrice ;
(9) Calcul d'un vecteur x solution de $Ax = b$, où A est une matrice et b un vecteur ;
(10) Recherche du plus court chemin entre deux stations de métro à Paris ;
(11) Test de primalité de n.
(12) Calcul de la n-ième décimale de $\sqrt{2}$;
(13) Calcul de l'inverse d'un nombre modulo 3 ;
(14) Recherche d'un échec et mat en 4 coups à partir d'une position donnée aux échecs.
(15) Problème du sac à dos : étant donné un ensemble d'objets d'épaisseur variable, et un sac à dos de hauteur donnée, peut-on remplir le sac à dos à bloc, sans déborder ?